

CODICE GRAY

Dimostrazione che la regola con cui si definisce il codice Gray dal codice binario crea combinazioni di bit consecutive che differiscono di un solo bit (distanza di Hamming=1)

Regola di codificazione

$$g_{m-1} = b_{m-1}$$

$$g_{m-2} = b_{m-2} \oplus b_{m-1}$$

$\vdots$

$$g_i = b_i \oplus b_{i+1}$$

$\vdots$

$$g_0 = b_0 \oplus b_1$$

Dato il numero binario:

$$N_{1b} = b_{m-1} b_{m-2} \dots \underbrace{b_k}_{\text{primo bit "0" del numero binario}} 0 1 1 \dots 1 +$$

$$N_{2b} = b_{m-1} b_{m-2} \dots \underbrace{b_k}_{\text{numero binario consecutivo}} 1 0 0 0 \dots 0 \quad (N_{2b} = N_{1b} + 1)$$

I corrispondenti numeri in codice Gray sono:

$$N_{1G} = g_{m-1} g_{m-2} \dots \underbrace{g_k}_{0 \oplus b_k} b_k 1 0 0 \dots 0$$

$$N_{2G} = g_{m-1} g_{m-2} \dots \underbrace{g_k}_{1 \oplus b_k} \bar{b}_k 1 0 0 \dots 0$$

Differenza tra codici Gray consecutivi solo sul k-esimo bit (posizione g_{k-1})

Per tutti bit ≥ 1 (caso non previsto precedentemente)

$$\begin{cases} N_{1b} = 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ N_{1G} = 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{cases}$$

(ultimo valore)

$$\begin{cases} N_{2b} = 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ N_{2G} = 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{cases}$$

(primo valore)

Regola per il passaggio da Gray a binario

dalla regola precedente

$$g_m = b_{m-1} \quad \text{e} \quad g_i = b_i \oplus b_{i+1}$$

Si può sommare ad entrambi i membri b_{i+1} . Si ha

$$g_i \oplus b_{i+1} = b_i \oplus b_{i+1} \oplus b_{i+1}$$

Dato che $b_{i+1} \oplus b_{i+1}$ è sempre zero si ottiene

$$b_i = g_i \oplus b_{i+1}$$

Riassumendo

$$b_{m-1} = g_{m-1}$$

$$b_{m-2} = g_{m-2} \oplus b_{m-1}$$

$$\vdots$$
$$b_i = g_i \oplus b_{i+1}$$

$$\vdots$$
$$b_0 = g_0 \oplus b_1$$