

Problema 3.13

Trovare le espressioni canoniche somme di prodotti e prodotti di somme per le funzioni $f(x_1, x_2)$ e $g(x_1, x_2)$ definite come

$$f(x_1, x_2) = 0 \text{ se e solo se } x_1 = 1, \text{ e } x_2 = 0$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{se } x_2 = 0 \\ \bar{x}_1 & \text{se } x_2 = 1 \end{cases}$$

a) Determinare se $g(x_1, x_2)$ è equivalente a

$$\overline{[f(x_1, x_2) \cdot f(x_2, x_1)]}$$

b) Mostrare che

$$g[f(x_1, x_2), f(x_2, x_1)] = g(x_1, x_2)$$

SOLUZIONE

x_2	x_1	$f(x_1, x_2)$	$g(x_1, x_2)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_1 + x_2 x_1 = m_0 + m_2 + m_3 & (\text{SOP}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = (x_2 + \bar{x}_1) = M_1 & (\text{POS}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x_1, x_2) = \bar{x}_2 x_1 + x_2 \bar{x}_1 & (\text{SOP}) \\ g(x_1, x_2) = (x_2 + x_1)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1) & (\text{POS}) \end{cases}$$

(segue Prob. 3.13)

a) Usando per "f" la forma canonica POS si ha:

$$\begin{aligned} \overline{f(x_1, x_2) \cdot f(x_2, x_1)} &= \overline{(x_2 + \bar{x}_1) \cdot (x_1 + \bar{x}_2)} = \\ &= \overline{x_2 x_1 + x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2} \quad \text{Distributività} \\ &= \overline{x_2 x_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2} \quad \text{Complementarità} \\ &= \overline{x_2 x_1} \cdot \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \quad \text{De Morgan} \\ &= (\bar{x}_2 + \bar{x}_1) \cdot (x_2 + x_1) \quad \text{De Morgan} \\ &= \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 x_1 \quad \text{Distributività} \\ &= \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_1 x_2 = g(x_1, x_2) \quad \underline{\underline{\text{O.K.}}} \end{aligned}$$

b) Sostituendo in $g(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2$ a x_1 x_2 rispettivamente le due forme canoniche POS di $f(x_1, x_2)$ e $f(x_2, x_1)$ già usate nella risposta a), si ha:

$$\begin{aligned} g[f(x_1, x_2), f(x_2, x_1)] &= g[(x_2 + \bar{x}_1), (x_1 + \bar{x}_2)] = \\ &= (x_2 + \bar{x}_1) \cdot (x_1 + \bar{x}_2) + \overline{x_2 + \bar{x}_1} \cdot (x_1 + \bar{x}_2) \\ &= (x_2 + \bar{x}_1) \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_1 \cdot (x_1 + \bar{x}_2) \quad \text{De Morgan} \\ &= x_2 \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_2 x_1 x_1 + \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_2 \quad \text{Distributività} \\ &= x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_2 x_1 \quad \text{Idempotenza} \\ &= x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 x_1 = g(x_1, x_2) \quad \text{Idempotenza} \\ &\quad \underline{\underline{\text{O.K.}}} \end{aligned}$$