

Problema G3-2

Dimostrare il teorema di De Morgan, senza far uso dell'induzione perfetta, servendosi del risultato che se $a+b=1$ e $a \cdot b=0$ allora $a=\bar{b}$ (vedi Problema G2)

SOLUZIONE

Si consideri la funzione binaria $x=ab$ e $y=\bar{a}+\bar{b}$ e si dimostra che $x+y=1$ e $x \cdot y=0$. Infatti

$$x+y = ab + (\bar{a}+\bar{b}) = (a+\bar{a}+\bar{b}) \cdot (b+\bar{a}+\bar{b}) = (1+\bar{b})(1+\bar{a}) = 1$$

inoltre

$$x \cdot y = ab(\bar{a}+\bar{b}) = ab\bar{a} + ab\bar{b} = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0$$

Per cui

$$\bar{x} = y$$

Sostituendo a x e y le relative funzioni si ha

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

che è una delle due forme del teorema di De Morgan.

(Si lascia come esercizio dimostrare la validità dell'altra forma del teorema: $\overline{\bar{a}+\bar{b}} = \bar{a} \cdot \bar{b}$)