

# PROBLEMA 4.7

1/7

Derivare espressioni SOP minimali per ciascuna delle seguenti funzioni:

a) OR ( $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_6, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}$ ).

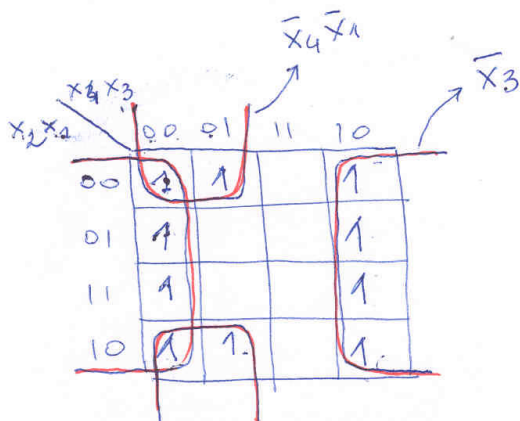
b) OR ( $m_0, m_1, m_5, m_7, m_8, m_{10}, m_{14}, m_{15}$ )

c) AND ( $M_1, M_3, M_7, M_9, M_{11}, M_{13}, M_{14}, M_{15}$ )

## SOLUZIONE

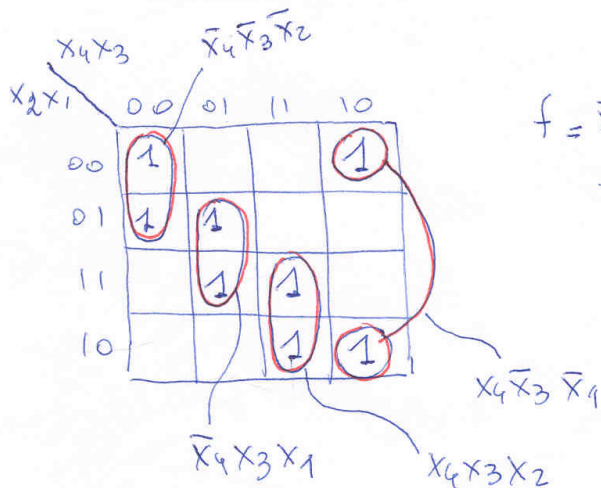
metodo M. Karnaugh

a)



$$f = \bar{x}_3 + \bar{x}_4\bar{x}_1$$

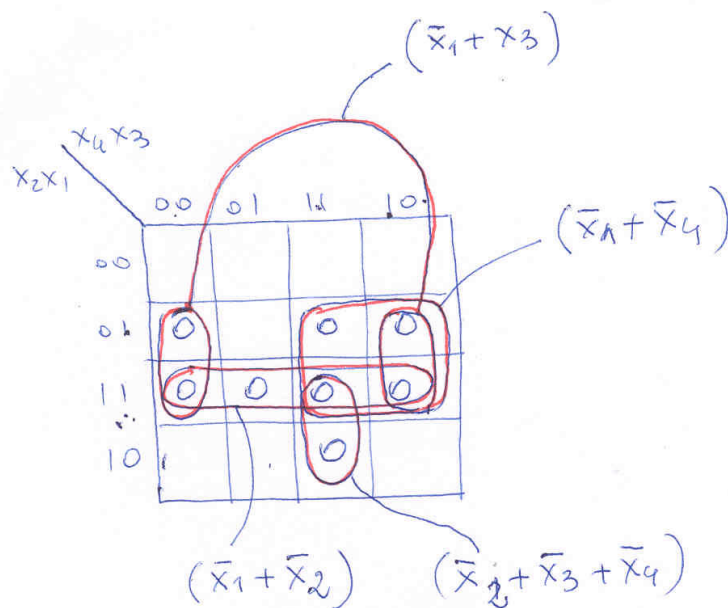
b)



$$f = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2 + \bar{x}_4x_3x_1 + x_4x_3x_2 + x_4\bar{x}_3\bar{x}_1$$

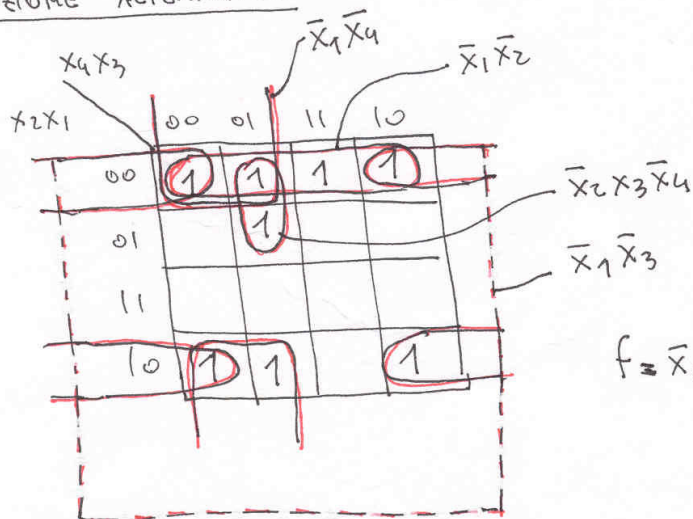
c)

2/7



$$\begin{aligned}
 f &= (\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) & \text{POS} \\
 &= (\bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_2 + \cancel{x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_2 \bar{x}_3} + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_2 \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 & \text{SOP}
 \end{aligned}$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA



$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Si lascia come esercizio di minimizzare  $\bar{f}$  invertendo i valori su ogni casella della mappa di K. e di applicare De Morgan due volte alla funzione minima  $\bar{f}$ .

(segue 4.7)

2)

metodo Quine McCluskey

3/7

FASE 1

|          |      |   |                   |      |   |                       |      |   |                               |      |
|----------|------|---|-------------------|------|---|-----------------------|------|---|-------------------------------|------|
| $m_0$    | 0000 | ✓ | $\Sigma m(0,1)$   | 000- | ✓ | $\Sigma m(0,1,2,3)$   | 00-- | ✓ | $\Sigma m(0,1,2,3,8,9,10,11)$ | -0-- |
| $m_1$    | 0001 | ✓ | $\Sigma m(0,2)$   | 00-0 | ✓ | $\Sigma m(0,1,8,9)$   | -00- | ✓ |                               |      |
| $m_2$    | 0010 | ✓ | $\Sigma m(0,4)$   | 0-00 | ✓ | $\Sigma m(0,2,8,10)$  | -0-0 | ✓ |                               |      |
| $m_4$    | 0100 | ✓ | $\Sigma m(0,8)$   | -000 | ✓ | $\Sigma m(0,4,2,6)$   | 0--0 | ✓ |                               |      |
| $m_8$    | 1000 | ✓ | $\Sigma m(1,3)$   | 00-1 | ✓ | $\Sigma m(1,3,9,11)$  | -0-1 | ✓ |                               |      |
| $m_3$    | 0011 | ✓ | $\Sigma m(1,9)$   | -001 | ✓ | $\Sigma m(2,3,10,11)$ | -01- | ✓ |                               |      |
| $m_6$    | 0110 | ✓ | $\Sigma m(2,3)$   | 001- | ✓ | $\Sigma m(8,9,10,11)$ | 10-- | ✓ |                               |      |
| $m_9$    | 1001 | ✓ | $\Sigma m(2,6)$   | 0-10 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
| $m_{10}$ | 1010 | ✓ | $\Sigma m(2,10)$  | -010 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
| $m_{11}$ | 1011 | ✓ | $\Sigma m(4,6)$   | 01-0 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
|          |      |   | $\Sigma m(8,9)$   | 100- | ✓ |                       |      |   |                               |      |
|          |      |   | $\Sigma m(8,10)$  | 10-0 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
|          |      |   | $\Sigma m(3,11)$  | -011 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
|          |      |   | $\Sigma m(9,11)$  | 10-1 | ✓ |                       |      |   |                               |      |
|          |      |   | $\Sigma m(10,11)$ | 101- | ✓ |                       |      |   |                               |      |

NB. Con  $\Sigma m(0,1)$  si intende somma di  $m_0 + m_1$   
 $\bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2$   
 $\Downarrow$   
 000-

FASE 2

(metodo analitico)

Dalla FASE 1 si hanno i due implicanti primi

$$P_1 = \bar{x}_4 \bar{x}_1 \rightarrow 0--0$$

$$\Sigma m(0,4,2,6)$$

$$P_2 = \bar{x}_3 \rightarrow -0--$$

$$\Sigma m(0,1,2,3,8,9,10,11)$$

La funzione binaria minimale è una somma di implicanti primi che deve coprire tutti i mintermini assegnati. Indicando con  $C_i$  una variabile binaria che vale "1" (vero) se il mintermine  $m_i$  è coperto e zero altrimenti, la necessità di coprire tutti i mintermini si traduce in:

$$\Phi = C_0 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_6 \cdot C_8 \cdot C_9 \cdot C_{10} \cdot C_{11} = 1 \text{ (vero)}$$

Indicando con  $P_i$  una variabile binaria che vale 1 (vero) se il relativo implicante  $P_i$  è stato scelto per coprire un certo mintermine, si ha:

$$C_0 = P_1 + P_2$$

$$C_1 = P_2$$

$$C_2 = P_1 + P_2$$

$$C_3 = P_2$$

$$C_4 = P_1$$

$$C_6 = P_1$$

$$C_8 = P_2$$

$$C_9 = P_2$$

$$C_{10} = P_2$$

$$C_{11} = P_2$$

$$\Phi = (P_1 + P_2) \cdot P_2 \cdot P_1 = P_1 P_2 \text{ UNICA SCELTA}$$

$$f = \bar{x}_4 \bar{x}_1 + \bar{x}_3$$

(metodo tabellare)

4/7

| MINTERMINI<br>IMPLICANTI<br>PRIMI |  | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_6$ | $m_8$ | $m_9$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ |
|-----------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| $P_1 \rightarrow 0--0$            |  | x     | x     | x     | x     | x     | x     |       |       |          | x        |
| $P_2 \rightarrow -0--$            |  | x     | x     | x     | x     | x     | x     | x     | x     | x        | x        |

$P_1$  implicante primo essenziale in quanto unico dell'insieme di implicanti primi capace di coprire  $m_4$  e  $m_6$

$P_2$  implicante primo essenziale per coprire  $m_1-f = P_1 + P_2$

2)

riduzione in forma minima con l'uso delle proprietà dell'Algebra di Boole

$$\begin{aligned}
 f &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} \\
 &= \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 + \\
 &\quad + x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 + x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 + x_4 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 + x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 = \\
 &= \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 (\bar{x}_1 + x_1) + \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 (\bar{x}_1 + x_1) + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 (\bar{x}_2 + x_2) + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 (\bar{x}_1 + x_1) + \\
 &\quad + x_4 \bar{x}_3 x_2 (\bar{x}_1 + x_1) = \bar{x}_4 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 + x_2) + x_4 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 + x_2) + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 = \\
 &= \bar{x}_3 (\bar{x}_4 + x_4) + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \\
 &= \bar{x}_3 + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 = (\bar{x}_3 + \bar{x}_3) (\bar{x}_3 + \bar{x}_4 \bar{x}_1) = \bar{x}_3 + \bar{x}_4 \bar{x}_1
 \end{aligned}$$

b)

## metodo Quine McCluskey

5/7

## FASE 1

|          |         |   |
|----------|---------|---|
| $m_0$    | 0 0 0 0 | ✓ |
| $m_4$    | 0 0 0 1 | ✓ |
| $m_8$    | 1 0 0 0 | ✓ |
| $m_5$    | 0 1 0 1 | ✓ |
| $m_{10}$ | 1 0 1 0 | ✓ |
| $m_7$    | 0 1 1 1 | ✓ |
| $m_{14}$ | 1 1 1 0 | ✓ |
| $m_{15}$ | 1 1 1 1 | ✓ |

|                   |      |       |
|-------------------|------|-------|
| $\Sigma m(0,1)$   | 000- | $P_1$ |
| $\Sigma m(0,8)$   | -000 | $P_2$ |
| $\Sigma m(1,5)$   | 0-01 | $P_3$ |
| $\Sigma m(8,10)$  | 10-0 | $P_4$ |
| $\Sigma m(5,7)$   | 01-1 | $P_5$ |
| $\Sigma m(10,14)$ | 1-10 | $P_6$ |
| $\Sigma m(7,15)$  | -111 | $P_7$ |
| $\Sigma m(14,15)$ | 111- | $P_8$ |

$$C_0 = P_1 + P_2$$

$$C_1 = P_1 + P_3$$

$$C_5 = P_3 + P_5$$

$$C_7 = P_5 + P_7$$

$$C_8 = P_2 + P_4$$

$$C_{10} = P_4 + P_6$$

$$C_{14} = P_6 + P_8$$

$$C_{15} = P_7 + P_8$$

## FASE 2

(metodo analitico)

$$F = (P_1 + P_2)(P_1 + P_3)(P_3 + P_5)(P_5 + P_7)(P_2 + P_4)(P_4 + P_6)(P_6 + P_8)(P_7 + P_8) =$$

$$= (P_1 + P_2 P_3)(P_5 + P_3 P_7)(P_4 + P_2 P_6)(P_8 + P_6 P_7) =$$

$$= (P_1 P_5 + P_1 P_3 P_7 + P_2 P_3 P_5 + P_2 P_3 P_7)(P_4 P_8 + P_4 P_6 P_7 + P_2 P_6 P_8 + P_2 P_6 P_7) =$$

$$= \boxed{P_1 P_5 P_4 P_8} + P_1 P_5 P_4 P_6 P_7 + P_1 P_5 P_2 P_6 P_8 + P_1 P_5 P_2 P_6 P_7 + P_1 P_3 P_7 P_4 P_8 + P_1 P_3 P_7 P_4 P_6 +$$

$$+ P_1 P_3 P_7 P_2 P_6 P_8 + P_1 P_3 P_7 P_2 P_6 + P_2 P_3 P_5 P_4 P_8 + P_2 P_3 P_5 P_4 P_6 P_7 + P_2 P_3 P_5 P_6 P_8 +$$

$$+ P_2 P_3 P_7 P_6 P_8 + \boxed{P_2 P_3 P_7 P_6} + P_2 P_3 P_7 P_4 P_8 + P_2 P_3 P_7 P_4 P_6 + P_2 P_3 P_7 P_6 P_8 +$$

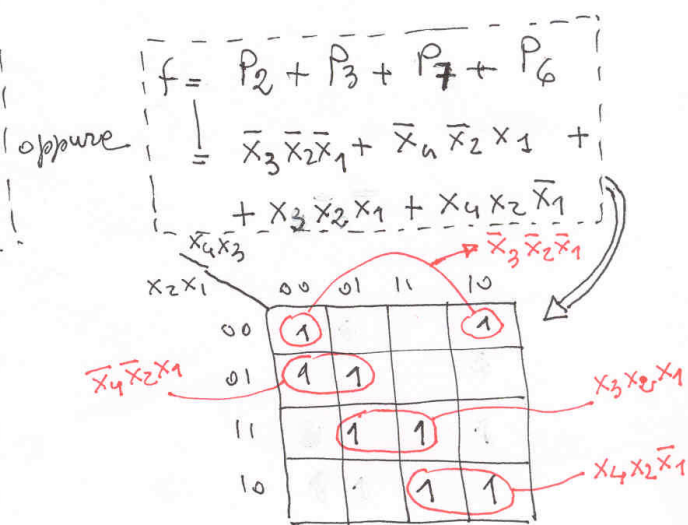
Essendo tutti i prodotti con lo stesso numero di lettere e scelte che minimizzano la funzione sono quelle cerchiato - si hanno due soluzioni a costo minimo scegliendo gli implicant primi  $P_1, P_5, P_4, P_8$  oppure  $P_2, P_3, P_7, P_6$ .

corrispondenti a:

$$f = P_1 + P_5 + P_4 + P_8$$

$$= \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 + \bar{x}_4 x_3 x_1 + x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_1 + x_4 x_3 x_2$$

↓  
CORRISPONDE ALLA MINIMIZZAZIONE FATTA CON LA MAPPA DI KARNAUGH



(metodo tabellare)

6/7

| MINITERMINI |      |       |       |       |       |       |          |          |          |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| IMPLICANTI  | 9 11 |       |       |       |       |       |          |          |          |
|             |      | $m_0$ | $m_1$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_8$ | $m_{10}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ |
| $P_1$       |      | x     | x     |       |       |       |          |          |          |
| $P_2$       |      | x     |       |       |       | x     |          |          |          |
| $P_3$       |      |       | x     | x     |       |       |          |          |          |
| $P_4$       |      |       |       |       |       | x     | x        |          |          |
| $P_5$       |      |       |       | x     | x     |       |          |          |          |
| $P_6$       |      |       |       |       |       |       | x        | x        |          |
| $P_7$       |      |       |       |       | x     |       |          |          | x        |
| $P_8$       |      |       |       |       |       |       |          | x        | x        |

In questa tabella degli implicanti primi non si possono applicare le regole indicate sul testo in quanto: non vi sono colonne con una sola croce (implicante primo essenziale), non vi sono colonne dominanti da eliminare, non vi sono righe dominate da eliminare (Tabella degli implicanti primi di tipo ciclico).

Il metodo disponibile resta quello analitico, applicato precedentemente.

c)

## metodo Quine McCluskey

7/7

## FASE 1

|          |      |   |
|----------|------|---|
| $m_0$    | 0000 | ✓ |
| $m_2$    | 0010 | ✓ |
| $m_4$    | 0100 | ✓ |
| $m_8$    | 1000 | ✓ |
| $m_5$    | 0101 | ✓ |
| $m_6$    | 0110 | ✓ |
| $m_{10}$ | 1010 | ✓ |
| $m_{12}$ | 1100 | ✓ |

|                  |      |         |
|------------------|------|---------|
| $\Sigma m(0,2)$  | 00-0 | ✓       |
| $\Sigma m(0,4)$  | 0-00 | ✓       |
| $\Sigma m(0,8)$  | -000 | ✓       |
| $\Sigma m(2,6)$  | 0-10 | ✓       |
| $\Sigma m(2,10)$ | -010 | ✓       |
| $\Sigma m(4,5)$  | 010- | ✓ $P_1$ |
| $\Sigma m(4,6)$  | 01-0 | ✓       |
| $\Sigma m(4,12)$ | -100 | ✓       |
| $\Sigma m(8,10)$ | 10-0 | ✓       |
| $\Sigma m(8,12)$ | 1-00 | ✓       |

|                      |      |         |
|----------------------|------|---------|
| $\Sigma m(0,2,4,6)$  | 0--0 | ✓ $P_2$ |
| $\Sigma m(0,4,8,12)$ | --00 | ✓ $P_3$ |
| $\Sigma m(0,8,2,10)$ | -0-0 | ✓ $P_4$ |

## FASE 2

(metodo tabellare)

|       | $m_0$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | $m_8$ | $m_{10}$ | $m_{12}$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|---|
| $P_1$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 3 |
| $P_2$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0        | 0        | 3 |
| $P_3$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1        | 1        | 3 |
| $P_4$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0        | 0        | 3 |

$$f = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

(metodo analitico)

$$C_0 = P_2 + P_3 + P_4$$

$$C_2 = P_2 + P_4$$

$$C_4 = P_1 + P_2 + P_3$$

$$C_5 = P_1$$

$$C_6 = P_2$$

$$C_8 = P_3 + P_4$$

$$C_{10} = P_4$$

$$C_{12} = P_3$$

$$\Phi = (P_2 + P_3 + P_4)(P_2 + P_4)(P_1 + P_2 + P_3) \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot (P_3 + P_4) \cdot P_4 \cdot P_3 = P_1 P_2 P_3 P_4$$

in quanto qualunque risultato dà la proprietà distributiva applicata alle parentesi risulteranno prodotti contenenti un qualunque parte dei quattro implichioni primi - Così  $(P_2 + P_3 + \dots) P_1 P_2 P_3 P_4 =$   
 $= (P_1 P_2 P_3 P_4 + \dots)$