

Problema 4.3

Il sistema di allarme di un ascensore ha i seguenti segnali di ingresso:

$G = 1$ se la porta è chiusa

$L = 1$ se l'ascensore è caricato

$B = 1$ se l'ascensore è chiamato

$U = 1$ se l'ascensore sta salendo

$D = 1$ se l'ascensore sta scendendo

Dare l'espressione di un segnale di allarme $A(G, L, B, U, D)$ tale che $A=1$ se la porta non è chiusa quando l'ascensore è in movimento oppure se l'ascensore è in movimento, ma risulta vuoto e non chiamato:

Soluzione

- logica delle proposizioni

La lettura della proposizione che descrive la logica di attivazione dell'allarme può essere così interpretata:

.... **$A=1$** se la porta non è chiusa (**$G=0$**) quando l'ascensore è in movimento (**$U=1$** **$D=1$**)
oppure se l'ascensore è in movimento (**$U=1$** **$D=1$**), ma risulta vuoto (**$L=0$**) e non
chiamato (**$B=0$**). Sintetizzando questa affermazioni alle sole parti evidenziate si ha:

$$\begin{array}{ccccc} A=1 & & \underline{\text{se}} & G=0 & & \underline{\text{e}} & & U=1 \underline{\text{ o }} D=1 \\ & & & & & \underline{\text{oppure}} & & \\ & & U=1 \underline{\text{ o }} D=1 & & \underline{\text{e}} & & L=0 \underline{\text{ e }} B=0 \end{array}$$

Questa affermazione, considerando che le congiunzioni e ed o si traducono, rispettivamente, nella funzione **AND** ed **OR** nell'algebra booleana, consentono di scrivere:

$$A = \overline{G} \cdot (U+D) + \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot (U+D)$$

Indicando con **M** la variabile che vale 1 se l'ascensore è in movimento, si può scrivere **$M=U+D$** , per cui la precedente relazione può essere riscritta come una funzione di quattro variabili:

$$A = \overline{G} \cdot M + \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M$$

Questa espressione è una rappresentazione SOP normale della funzione.

La forma canonica corrispondente si può ottenere con l'algebra di commutazione:

- espandendo il primo prodotto applicando la proprietà di complementarietà alla variabile **L** e alla variabile **B** (assenti nell'implicante):

$$\begin{aligned} \overline{G} \cdot M &= \overline{G} \cdot (L + \overline{L}) \cdot M = \overline{G} \cdot L \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot M = \overline{G} \cdot L \cdot (B + \overline{B}) \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot (B + \overline{B}) \cdot M = \\ &= \overline{G} \cdot L \cdot B \cdot M + \overline{G} \cdot L \cdot \overline{B} \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot B \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M = \overline{G} \cdot L \cdot B \cdot M + \overline{G} \cdot L \cdot \overline{B} \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot B \cdot M = \\ &= m_7 + m_5 + m_3 \end{aligned}$$

- espandendo il secondo prodotto applicando la proprietà di complementarietà alla sola variabile **A** (unica assente nell'implicante):

$$\bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M = (G + \bar{G}) \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M = G \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M + \bar{G} \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M = m_9 + m_1$$

Il risultato finale è

$$A = \text{OR}(m_1, m_3, m_5, m_7, m_9) = \bar{G} \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M + \bar{G} \cdot \bar{L} \cdot B \cdot M + \bar{G} \cdot L \cdot \bar{B} \cdot M + \bar{G} \cdot L \cdot B \cdot M + G \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M$$

In alternativa dalla espressione $A = \bar{G} \cdot M + \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M$
Si può ricavare la tavola di verità:

- funzione descritta con la tavola di verità

Si considerano le quattro variabili

G	L	B	M	A	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	m_1
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	m_3
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	m_5
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	m_7
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	m_9
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

- forma canonica ricavata dalla tavola di verità

La funzione contiene cinque minterm che, con l'ordinamento prefissato (**G**: bit più significativo; **L** e **B** i due successivi di peso 4 e 2; **M** il meno significativo), sono m_1 , m_3 , m_5 , m_7 ed m_9 . La forma SOP canonica risulta ancora (confronta con risultato precedente):

$$A = \text{OR}(m_1, m_3, m_5, m_7, m_9) = \bar{G} \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M + \bar{G} \cdot \bar{L} \cdot B \cdot M + \bar{G} \cdot L \cdot \bar{B} \cdot M + \bar{G} \cdot L \cdot B \cdot M + G \cdot \bar{L} \cdot \bar{B} \cdot M$$

- forma minima ricavata algebricamente

Per minimizzare la forma canonica bisogna cercare coppie di prodotti che abbiano tutti i letterali uguali ad esclusione di uno, che in un prodotto appare in forma diretta e nell'altro in forma negata (prodotti adiacenti).

- m_1 con m_3

$$\overline{G} \cdot \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M + \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot B \cdot M = \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot M$$

- m_5 con m_7

$$\overline{G} \cdot L \cdot \overline{B} \cdot M + \overline{G} \cdot L \cdot B \cdot M = \overline{G} \cdot L \cdot M$$

- m_1 con m_9

$$\overline{G} \cdot \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M + G \cdot \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M = \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M$$

Dopo questi primi raggruppamenti si ottiene la forma SOP somma di tre implicanti:

$$A = \overline{G} \cdot \overline{L} \cdot M + \overline{G} \cdot L \cdot M + \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M$$

I primi due prodotti (implicanti non mintermin) sono ancora adiacenti in quanto differiscono solo per il letterale L . Riapplicando la proprietà distributiva e di complementarietà si ha:

$$A = \overline{G} \cdot M \cdot (\overline{L} + L) + \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M = \overline{G} \cdot M + \overline{L} \cdot \overline{B} \cdot M$$

che coincide con l'espressione ottenuta direttamente dall'uso della logica delle proposizioni.

- forma minima ricavata con le mappe di Karnaugh

La **m. di K.** per la funzione di quattro variabili, fin qui discussa (ricavata dalla forma SOP normale o dalla tavola di verità), risulta:

G,L B,M		00 01 11 10			
		00	01	11	10
00		0	0	0	0
01		1	1	0	1
11		1	1	0	0
10		0	0	0	0

Diagram illustrating the Karnaugh map for a 4-variable function. The map is a 4x4 grid with rows labeled 00, 01, 11, 10 and columns labeled 00, 01, 11, 10. The values in the cells are 0, 0, 0, 0; 1, 1, 0, 1; 1, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0. Two groups are highlighted: a red rectangle (2-cube) covering cells (01,00), (01,01), (11,00), (11,01) labeled $\bar{G}M$, and a blue rectangle (1-cube) covering cells (01,00), (01,01) labeled $\bar{L}B$.

Il cubo massimale essenziale (2-cubo) che contiene i quattro minterm 1,3,5,7, genera l'implicante $\bar{G} \cdot M$.

Il cubo massimale essenziale (1-cubo) che contiene i due minterm 1,9, genera l'implicante $\bar{L} \cdot B \cdot M$.

L'espressione minima si ottiene eseguendo l'OR dei due implicanti. Si ottiene ancora $A = \bar{G} \cdot M + \bar{L} \cdot B \cdot M$.