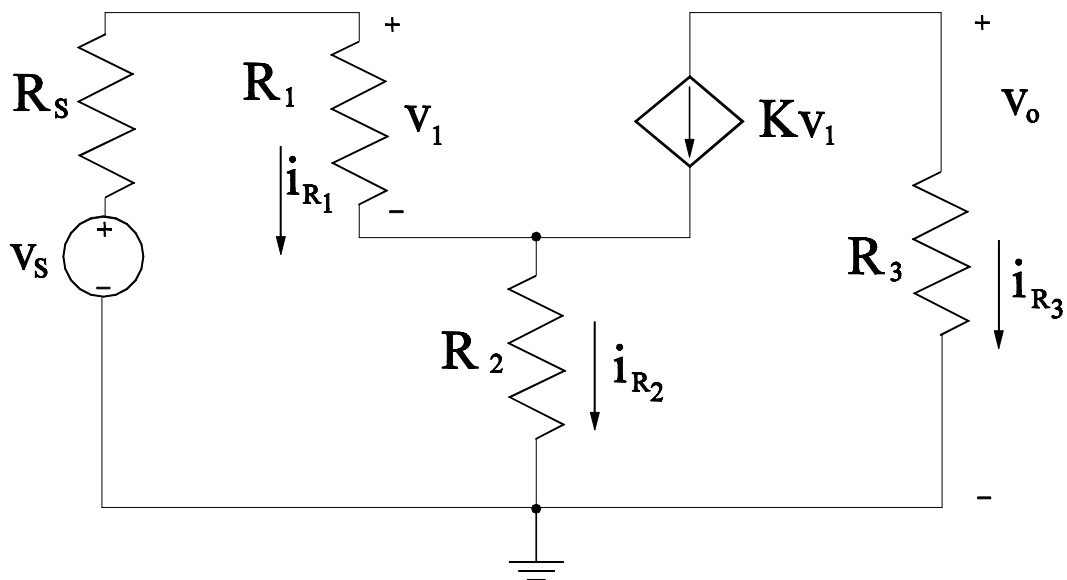


Esercizio 2

Risolvere il circuito di figura (determinare: i_{R1} , i_{R2} , i_{R3} , v_0).

DATI: $R_S=1\text{ k}\Omega$, $R_1=1\text{ k}\Omega$, $R_2=2\text{ k}\Omega$, $R_3=3\text{ k}\Omega$, $v_S=5\text{ V}$, $K=100\text{ mS}$



Soluzione

È facile verificare che le correnti sui tre rami dipendono tutte dalla tensione v_1 .

$$\begin{cases} i_{R1} = \frac{v_1}{R_1} \\ i_{R2} = i_{R1} + K v_1 = \frac{v_1}{R_1} + K v_1 = \left(\frac{1}{R_1} + K \right) v_1 \\ i_{R3} = -K v_1 \end{cases}$$

Il legame tra v_1 e v_S si può facilmente determinare dal 2° principio di Kirchhoff scritto per la maglia di ingresso:

$$v_S = (R_S + R_1) i_{R1} + R_2 i_{R2} = (R_S + R_1) \frac{v_1}{R_1} + R_2 \left(\frac{1}{R_1} + K \right) v_1$$

e quindi:

$$v_1 = \frac{v_s}{\frac{R_s + R_1}{R_1} + R_2 \left(\frac{1}{R_1} + K \right)} = \frac{R_1}{R_s + R_1 + R_2 (1 + KR_1)} v_s$$

Se si sostituisce questa espressione, v_1 in funzione di v_s , nelle precedenti espressioni di i_{R1} , i_{R2} , i_{R3} si ottengono le espressioni finali per il calcolo delle correnti in funzione dei dati.

In alternativa si può fare direttamente una valutazione numerica della tensione v_1 e sostituire questo valore numerico nelle espressioni delle correnti.

Seguendo questo secondo procedimento, si ha:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_s + R_1 + R_2 (1 + KR_1)} v_s = \frac{10^3}{10^3 + 10^3 + 2 \times 10^3 (1 + 100 \times 10^{-3} \times 10^3)} 5 \cong$$

$$\cong 24,5 \text{ mV}$$

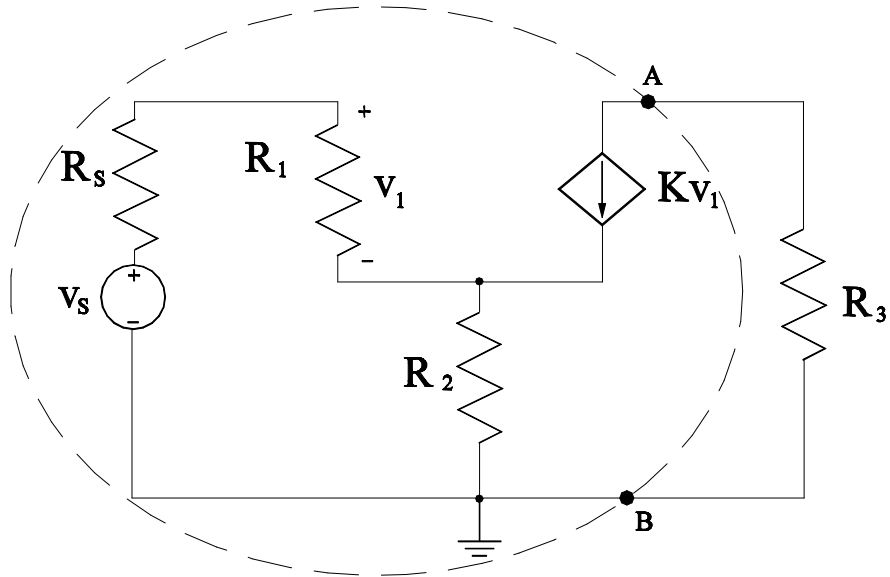
da cui

$$\begin{cases} i_{R1} = \frac{v_1}{R_1} = \frac{24,5 \text{ mV}}{10^3 \Omega} = 24,5 \mu\text{A} \\ i_{R2} = \left(\frac{1}{R_1} + K \right) v_1 = \left(\frac{1}{10^3} + 100 \times 10^{-3} \right) \times 24,5 \times 10^{-3} = 2,475 \text{ mA} \\ i_{R3} = -K v_1 = -100 \times 10^{-3} \times 24,5 \times 10^{-3} = -2,45 \text{ mA} \end{cases}$$

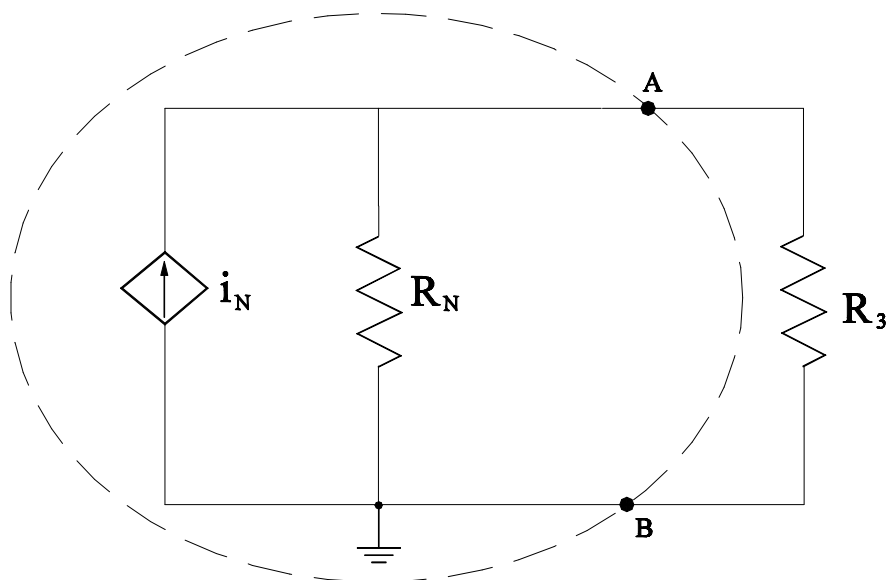
Infine il valore di v_o

$$v_o = -R_3 i_{R3} = -3 \times 10^3 \times 2,45 \times 10^{-3} = -7,35 \text{ V}$$

È possibile risolvere lo stesso esercizio applicando il **Teorema di Norton** al bipolo che si ottiene dalla rete proposta rimuovendo la resistenza R_3



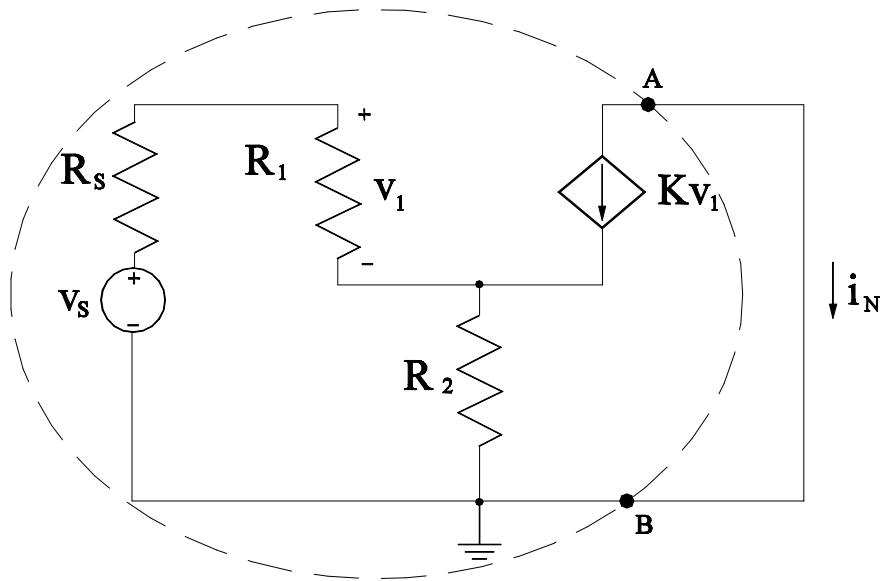
Il generatore equivalente di Norton è



calcolo di i_N :

Dall'equivalenza dei due circuiti (rispetto al carico collegato tra **A** e **B**) si ricava che il comportamento in corto circuito dei terminali **A** e **B** è lo stesso ($v_{AB}=0$, $i_{AB}=i_N$).

Dalla prima rete si deduce il valore di i_N :

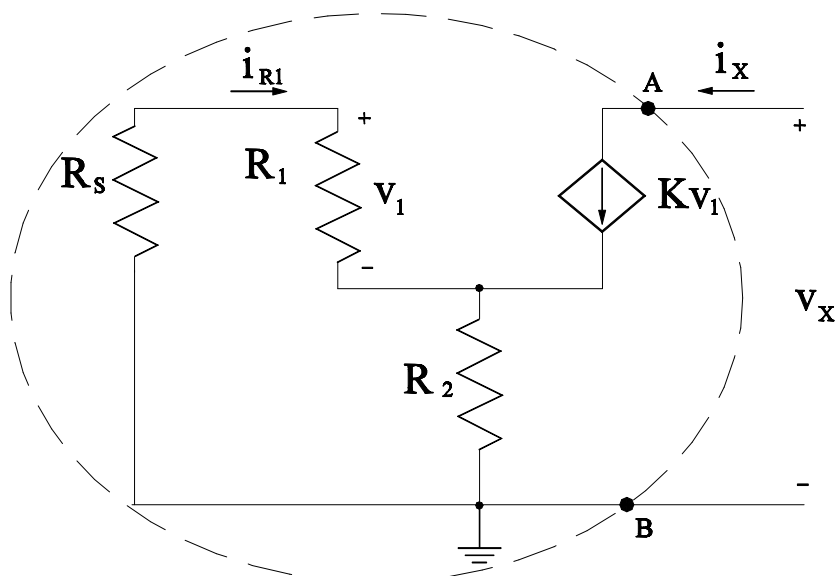


$$i_N = -K v_1 = -K \frac{R_1}{R_s + R_1 + R_2 (1 + K R_1)} v_s = -100 \times 10^{-3} \times 24,5 \mu A = -2,45 \text{ mA}$$

L'espressione ed il valore di v_1 sono stati ricavati nello sviluppo precedente.

calcolo di R_N :

Si fa riferimento al seguente schema della rete, nel quale è cortocircuito il generatore di tensione indipendente interno v_s e si indica con v_x e i_x tensione e corrente prodotta da un generatore esterno



Si ha

$$R_N = \frac{V_X}{i_X} = \frac{V_X}{K V_1}$$

La tensione v_1 è legata a i_{R1} che a sua volta è legata a i_X dal partitore di corrente formato dai rami $(R_S + R_1)$ e R_2 .

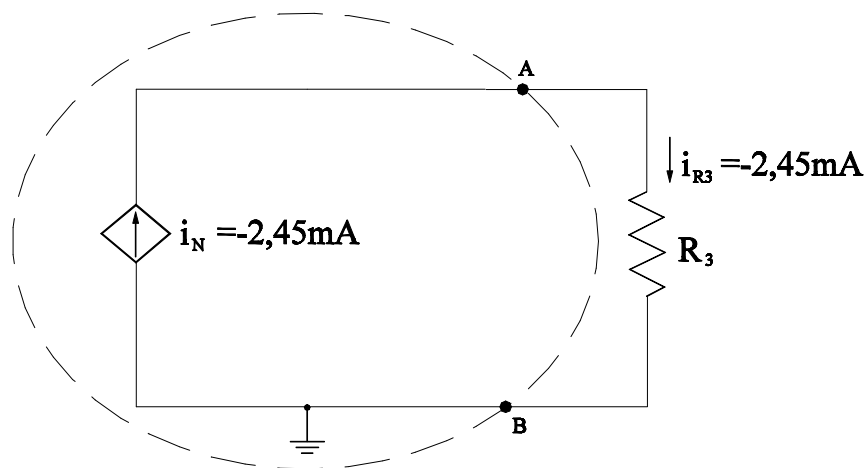
$$v_1 = R_1 i_{R1} = -R_1 \frac{R_2}{(R_S + R_1) + R_2} i_X = - \frac{R_1 R_2}{(R_S + R_1) + R_2} K v_1$$

che determina la seguente relazione per v_1

$$v_1 + \frac{K R_1 R_2}{(R_S + R_1) + R_2} v_1 = 0$$

Da questa relazione si ricava $v_1 = 0$. Dalla precedente espressione di R_N con $v_1 = 0$ si determina $R_N \rightarrow \infty$.

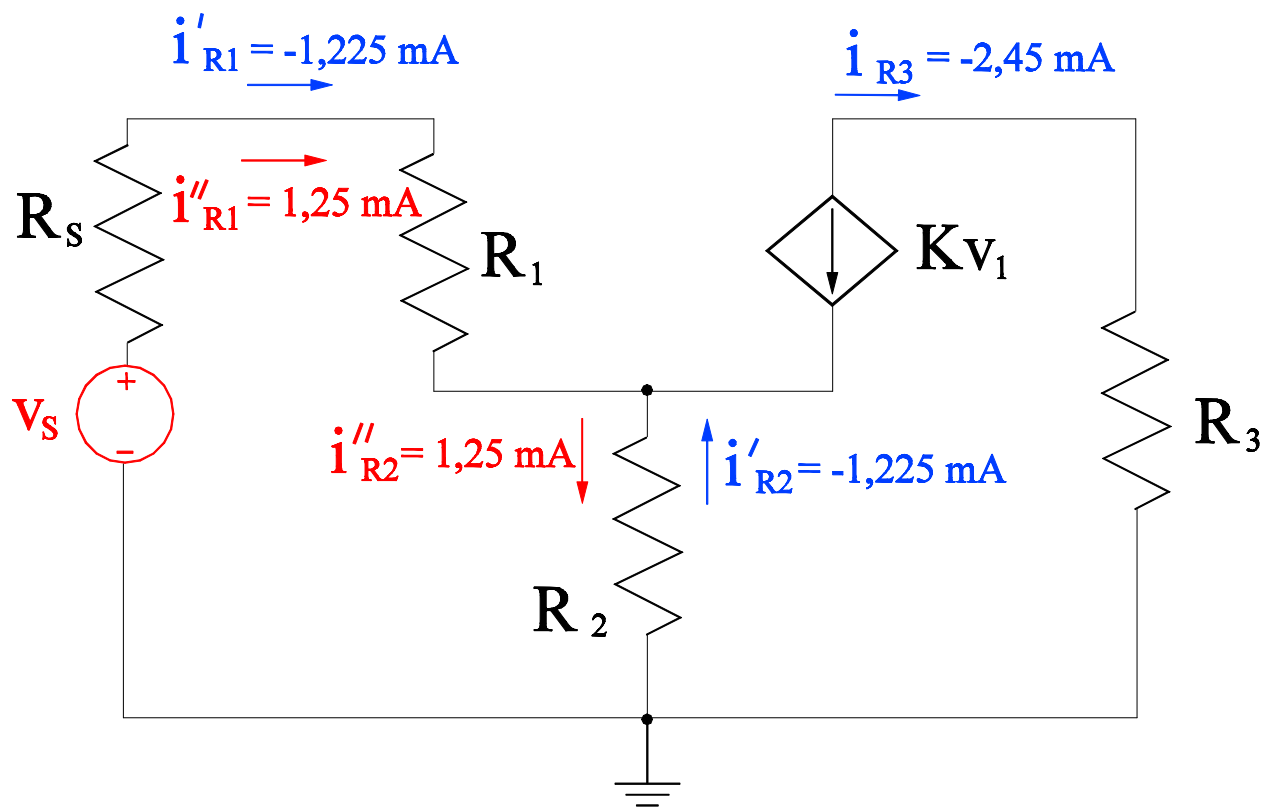
Ne deriva, dal circuito equivalente di Norton, $i_{R3} = i_N = -2,45 \text{mA}$, risultato coincidente con la soluzione precedente.



Riportando il valore di $i_{R3} = -2,45 \text{mA}$ sullo schema della rete assegnata, si possono trovare le due correnti rimanenti, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti prodotti dal solo generatore v_S e dalla sola corrente i_{R3} .

Si ha

$i_{R1}'' = i_{R2}'' = v_S / (R_S + R_1 + R_2)$, $i_{R1}' = i_{R3} R_2 / (R_S + R_1 + R_2)$, $i_{R2}' = i_{R3} (R_S + R_1) / (R_S + R_1 + R_2)$ e, con facili sostituzioni numeriche, si trovano i valori indicati nella seguente figura



Combinando infine i valori degli effetti su ogni ramo si riottengono i valori della prima soluzione.

Si nota infine che volendo applicare il **Teorema di Thèvenin** allo stesso bipolo **AB** utilizzato per il Teorema di Norton si arriva ad una indeterminazione. Infatti essendo v_1 diverso da zero, $v_1 = v_S R_1 / (R_S + R_1 + (1+K)R_2)$, anche la corrente generata dal generatore ideale, Kv_1 , è diversa da zero. Ne deriva che la tensione a vuoto (resistenza tra **A** e **B** infinita), coincidente con la tensione del generatore equivalente, è infinita. La resistenza "vista" dal generatore che alimenta il bipolo di uscita **AB** coincide con R_N , di valore ancora infinito. Il generatore di Thèvenin ha entrambi i parametri di valore infinito.