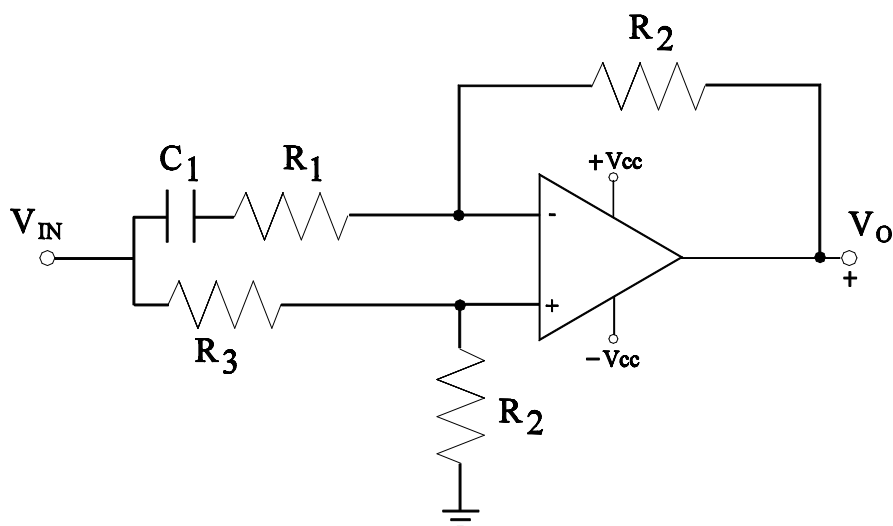


Esercizio 6 (20-01-04)

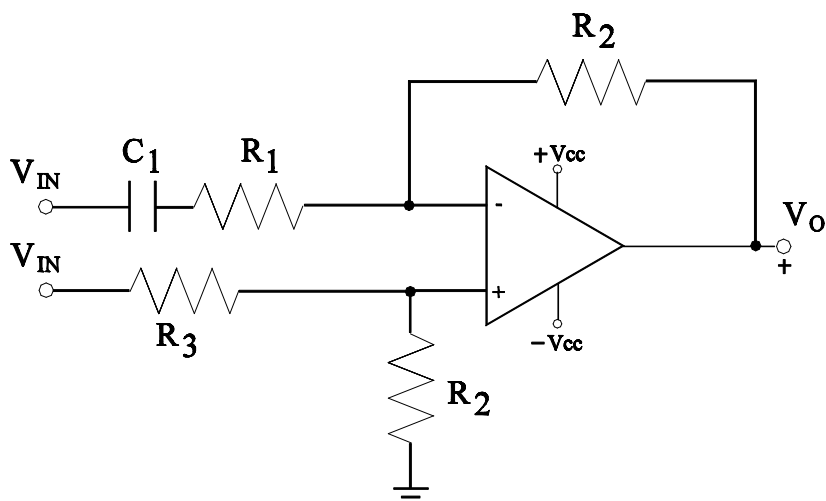
Dato il circuito di figura, che utilizza un amplificatore operazionale ideale, determinare la funzione di trasferimento tra V_{in} e V_o .



Supponendo $R_1 > R_3$, tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase.

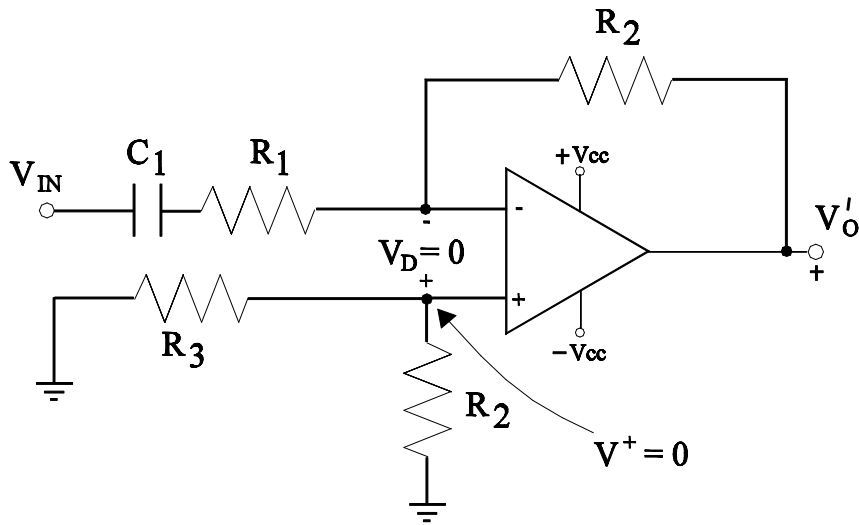
Soluzione

Il circuito dato è equivalente a quello a due ingressi ai quali è applicato lo stesso segnale V_{in} .



In questo modo si può determinare l'uscita applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

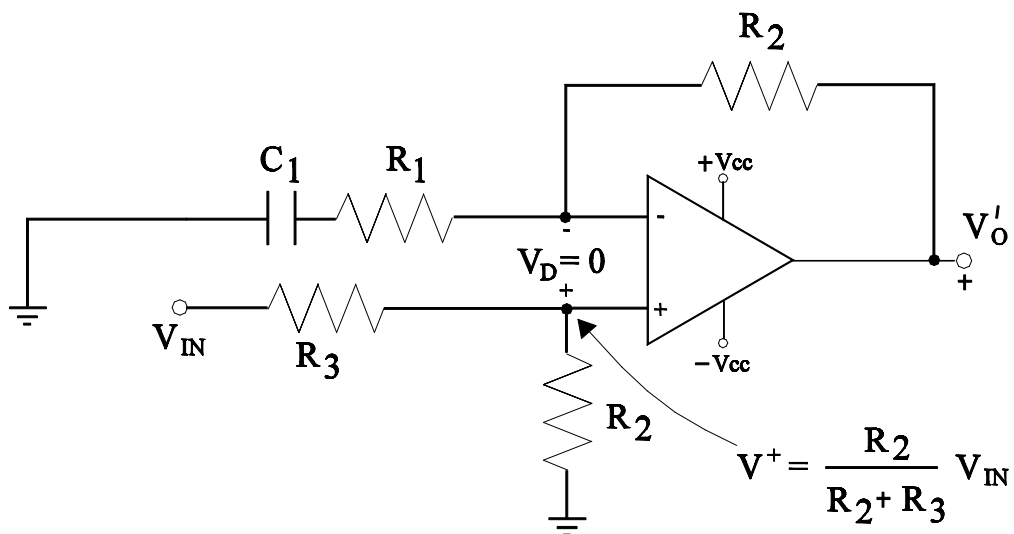
Indicando con V_o' l'uscita prodotta dal solo segnale V_{IN} agente sul ramo R_1C_1 , si ha la situazione illustrata dal seguente circuito



Si riconosce la tipica configurazione invertente per cui:

$$V_o' = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} V_{IN} = - \frac{sR_2C_1}{1 + sR_1C_1} V_{IN}$$

Indicando con V_o'' l'uscita prodotta dal solo segnale V_{IN} agente sul ramo R_3 , si ha la situazione illustrata dal seguente circuito



Si riconosce la tipica configurazione non invertente per cui:

$$V_o'' = \left(1 + \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \right) V^+ = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \left(1 + \frac{sR_2C_1}{1 + sR_1C_1} \right) V_{IN}$$

Infine combinando i due effetti si ottiene:

$$V_o = V_o' + V_o'' = \left(-\frac{sR_2C_1}{1 + sR_1C_1} + \frac{R_2}{R_2 + R_3} \left(1 + \frac{sR_2C_1}{1 + sR_1C_1} \right) \right) V_{IN}$$

$$V_o = \frac{R_2}{1 + sR_1C_1} \left(-sC_1 + \frac{1 + sR_1C_1 + sR_2C_1}{R_2 + R_3} \right) V_{IN}$$

$$V_o = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{1 + s(R_1 - R_3)C_1}{1 + sR_1C_1} V_{IN}$$

DIAGRAMMI DI BODE

La funzione di trasferimento in regime sinusoidale si ottiene dalla precedente ponendo $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_{IN}} = A_0 \frac{1 + j\omega\tau_z}{1 + j\omega\tau_p} = A_0 \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_z}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_p}}$$

con

$$A_0 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} < 1 ; \tau_z = (R_1 - R_3)C_1 < \tau_p = R_1C_1 ; \omega_z = \frac{1}{\tau_z} > \omega_p = \frac{1}{\tau_p}$$

MODULO F. di T.

Si ha

$$|W(j\omega)| = \frac{V_o}{V_{IN}} = A_o \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Il guadagno in dB risulta:

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

La fase della f. di t. risulta:

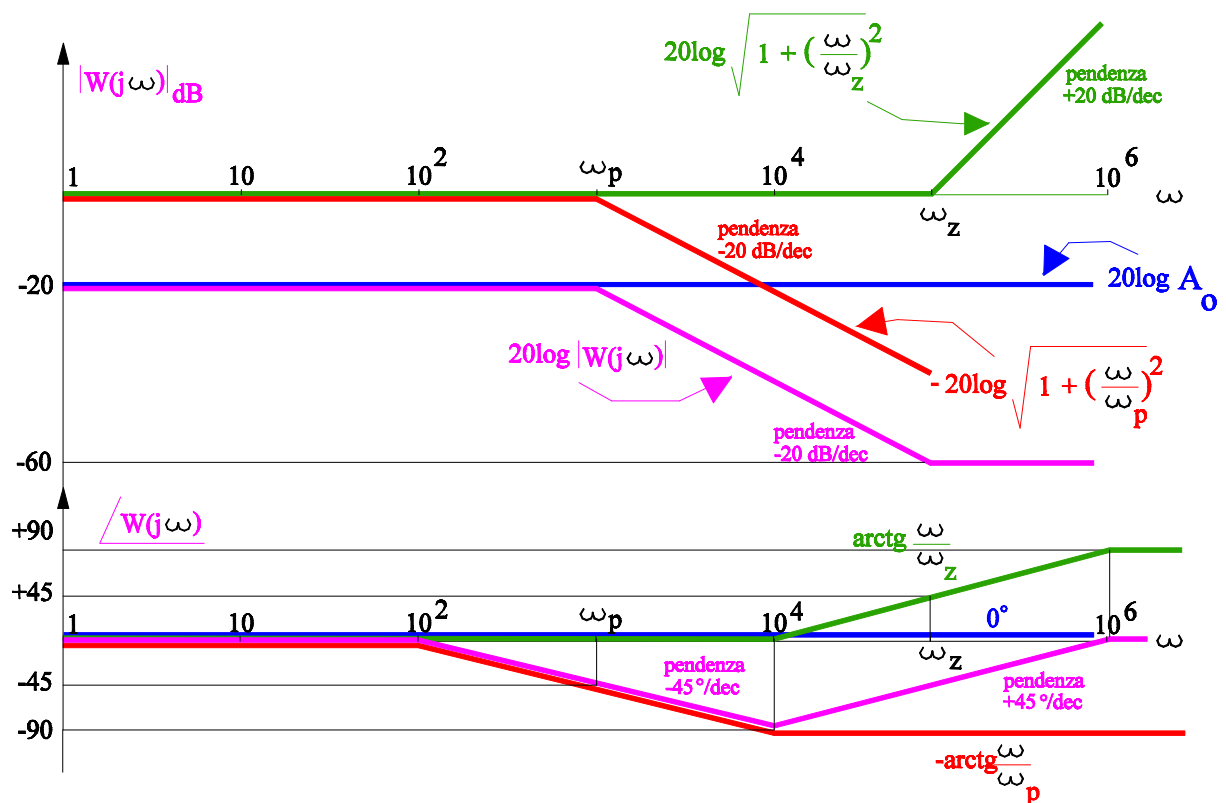
$$\angle W(j\omega) = \angle A_o + \angle \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_z} \right] - \angle \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_p} \right] = 0 + \arctg \frac{\omega}{\omega_z} - \arctg \frac{\omega}{\omega_p}$$

(NB. Le componenti di modulo e fase con lo stesso colore derivano dallo stesso fattore della f. di t. complessa)

I diagrammi di Bode rappresentano graficamente, in scala logaritmica, $|W(j\omega)|_{dB}$ e $\angle W(j\omega)$, in funzione della frequenza.

Per dare maggior concretezza al risultato, piuttosto che tracciare dei grafici solamente qualitativi, si fanno le seguenti ipotesi numeriche:

$$A_o = \frac{1}{10}; \omega_p = 10^3; \omega_z = 10^5$$



Per utilizzare ed interpretare i diagrammi (asintotici) di Bode si può immaginare di applicare in ingresso del circuito dato il seguente segnale sinusoidale:

$$v_{IN} = 100 \sin \omega t \quad \text{con } \omega = 3162 \text{ rad / sec}$$

Questo segnale ha la seguente rappresentazione fasoriale

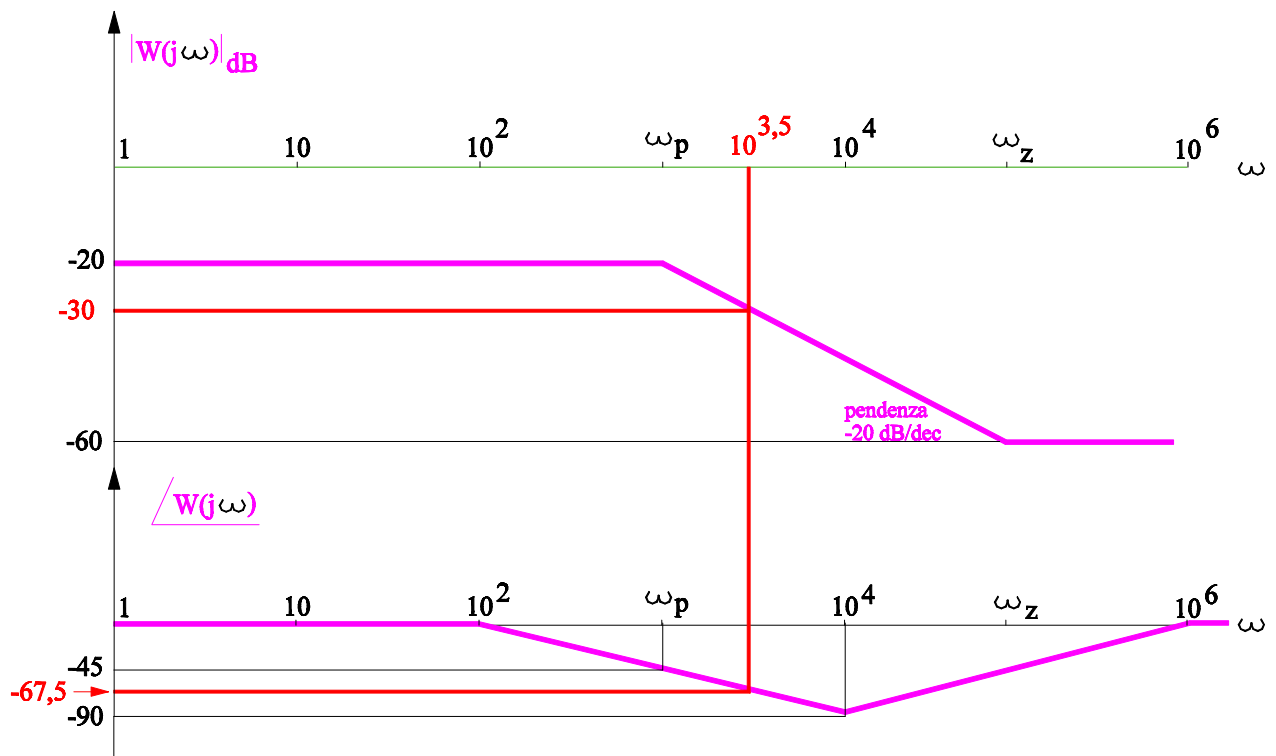
$$\bar{V}_{IN} = 100 \left\{ \begin{array}{l} V_{IN} = 100 \\ \underline{\bar{V}_{IN}} = 0 \end{array} \right\}$$

Modulo e fase del segnale di ingresso e della funzione di trasferimento consentono di determinare modulo e fase dell'uscita con le relazioni

$$\bar{V}_o = W(j\omega) \bar{V}_{IN} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_o = |W(j\omega)| V_{IN} \\ \underline{\bar{V}_o} = \underline{|W(j\omega)|} + \underline{\bar{V}_{IN}} \end{array} \right\}$$

Il modulo e la fase della f.di t. devono essere valutati alla pulsazione 3162 rad/sec. Per identificare nei diagrammi di Bode l'ascissa corrispondente a questo valore, osservando che gli esponenti della base 10 variano linearmente lungo l'asse, si deve calcolare:

$$\omega = 10^x \quad \text{con } x = \log 3162 = 3,5 \quad \text{per cui} \quad \omega = 10^{3,5}$$



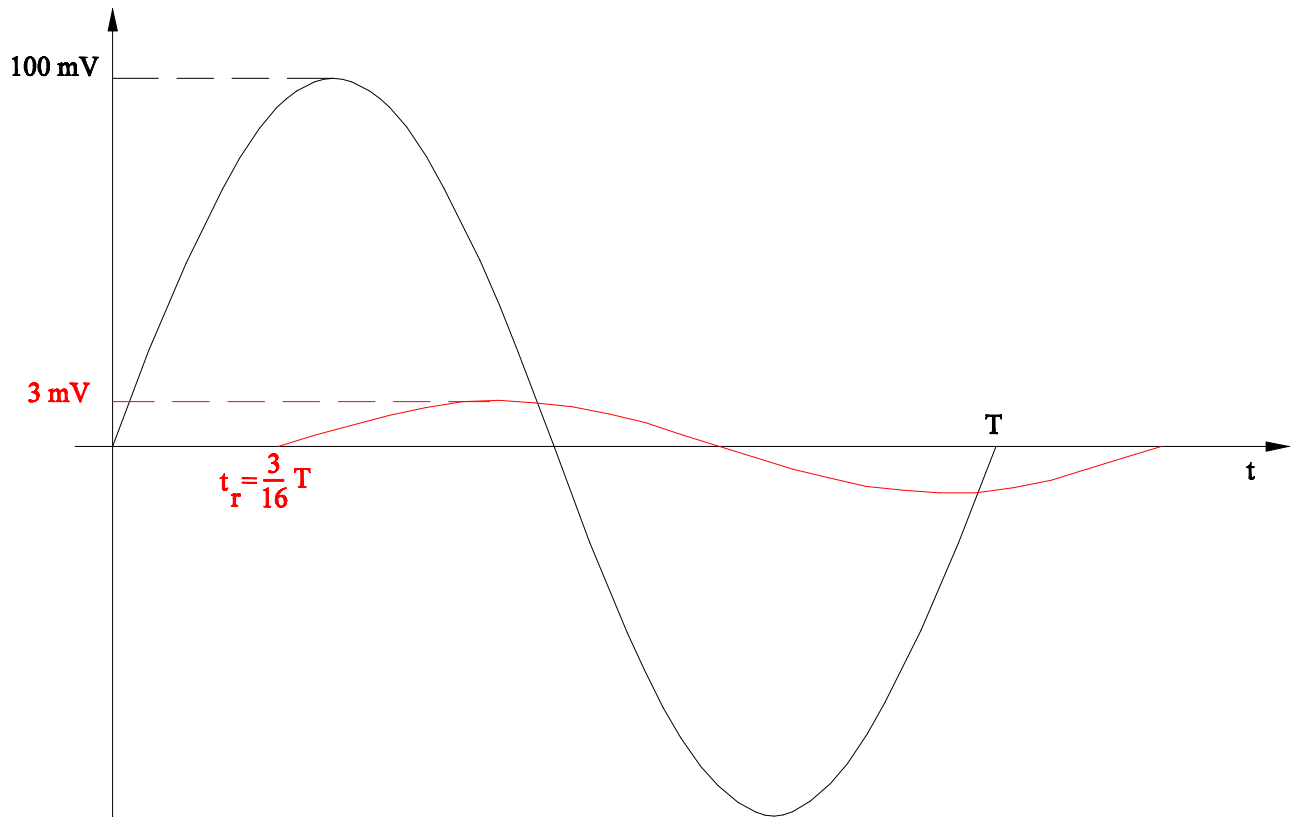
Riportando questo valore sui grafici di Bode si ricava, qa questa pulsazione, $|W(j3162)|_{dB} = -30dB$ e $\angle W(j3162) = -67,5^\circ$. Dal primo dei due valori rilevati si ricava:

$$|W(j\omega)| = 10^{\frac{|W(j\omega)|_{dB}}{20}} = 10^{\frac{-30}{20}} \cong 0,03$$

e quindi, dalle precedenti, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_o = |W(j\omega)| V_{IN} = 0,03 \cdot 100 = 3 \text{ mV} \\ \angle V_o = \angle W(j\omega) + \angle V_{IN} = -67,5^\circ + 0^\circ = -67,5^\circ \end{array} \right\}$$

Il risultato ottenuto corrisponde alla seguente rappresentazione grafica delle due sinusoidi di ingresso e di uscita



dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3162} \cong 2 \text{ ms}$$

e t_r si determina dalla

$$t_r = \frac{67,5}{360} T = \frac{3}{16} T$$

