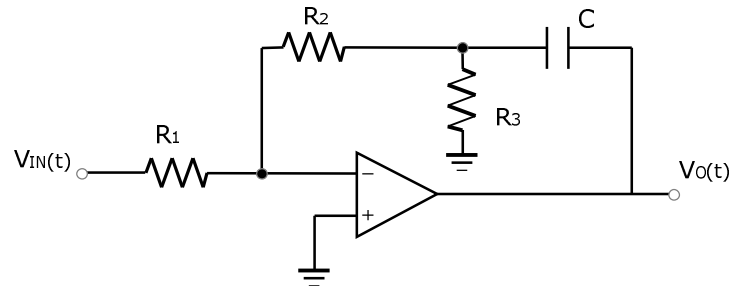


PRIMO HOMEWORK 2008

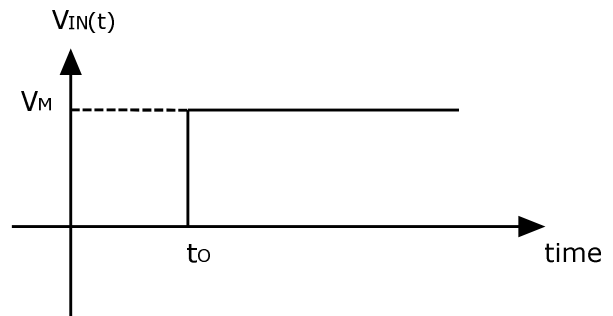
ESERCIZIO 1

Dato il circuito di figura, che impiega un amplificatore operazionale ideale, si richiede di:

1. determinare l'espressione della tensione di uscita $V_O(t)$ in funzione della tensione di ingresso $V_{IN}(t)$ generica;
2. calcolare e tracciare l'andamento della tensione di uscita nel caso in cui la tensione di ingresso sia la funzione a gradino mostrati in figura (considerare il condensatore inizialmente scarico)



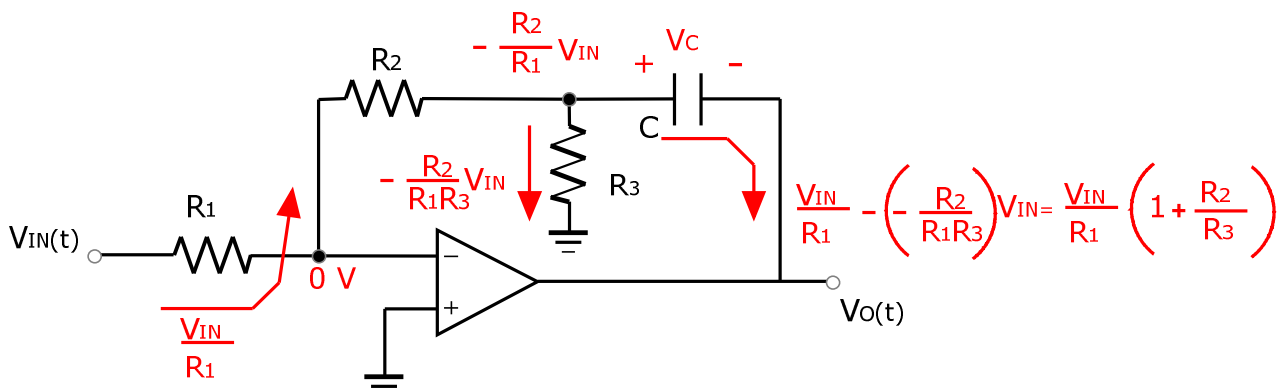
Dati: $R_1=100\text{k}\Omega$, $R_2=200\text{k}\Omega$, $R_3=100\text{k}\Omega$, $C=100\mu\text{F}$,
 $V_M=1\text{V}$



Soluzione

Dominio del tempo

Si possono valutare le correnti sui singoli rami ed il potenziale del nodo comune di R_1 , R_3 e C , nel modo mostrato dalla seguente figura



1)

Considerando che la d.d.p. ai capi del condensatore coincide con la V_C e che, questa tensione, è l'integrale della relativa corrente, si ha:

$$V_O = -\frac{R_2}{R_1}V_{IN} - V_C = -\frac{R_2}{R_1}V_{IN} - \frac{1}{R_1 C} \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \int_{t_0}^t V_{IN}(t) dt + V_{CO}$$

Dove con VCO si è indicato il valore della tensione VC all'istante t0.

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$v_O(t) = -\frac{200k\Omega}{100k\Omega} v_{IN}(t) - \frac{1}{100k\Omega} \left(1 + \frac{200k\Omega}{100k\Omega \cdot 100\mu F} \right) \int_{t_0}^t v_{IN}(t) dt$$

$$v_O(t) = -2v_{IN}(t) - 0,3 \int_{t_0}^t v_{IN}(t) dt = -2 - 0,3(t - t_0) \quad \text{per } t > t_0$$

Dominio di s

Applicando il primo principio di Kirchhoff al nodo comune di R1, R3 e C, si ottiene:

$$\frac{V_{IN}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1 R_3} V_{IN} + \left(-\frac{R_2}{R_1} V_{IN} - V_O \right) sC$$

$$V_O \cdot sC = -\frac{V_{IN}}{R_1} - \frac{R_2}{R_1 R_3} V_{IN} - \frac{sR_2 C}{R_1} V_{IN} = -\frac{sR_2 C V_{IN}}{R_1} - \frac{V_{IN}}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right)$$

$$V_O = -\frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) + sR_2 C}{sR_1 C} V_{IN}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri circuitali e la $\mathcal{L}$ -trasformata del segnale a gradino ritardato di t0, si ha:

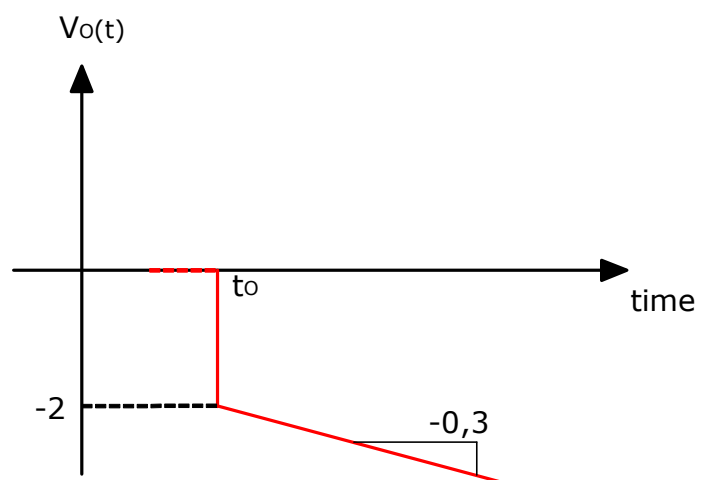
$$V_O = -\frac{\left(1 + \frac{200k\Omega}{100k\Omega} \right) + s \cdot 200k\Omega \cdot 100\mu F}{s \cdot 100k\Omega \cdot 100\mu F} \cdot \frac{1}{s} e^{-st_0} = -\frac{3 + s \cdot 20}{s \cdot 10} \cdot \frac{1}{s} e^{-st_0} = -\frac{3}{s^2} \cdot e^{-st_0} + \frac{2}{s} \cdot e^{-st_0}$$

Antitrasformando si ottiene ancora:

$$v_O(t) = -0,3(t - t_0) + 2 \cdot u(t - t_0) \quad \text{per } t > t_0; \quad \text{con } u(t) \text{ segnale a gradino unitario}$$

2)

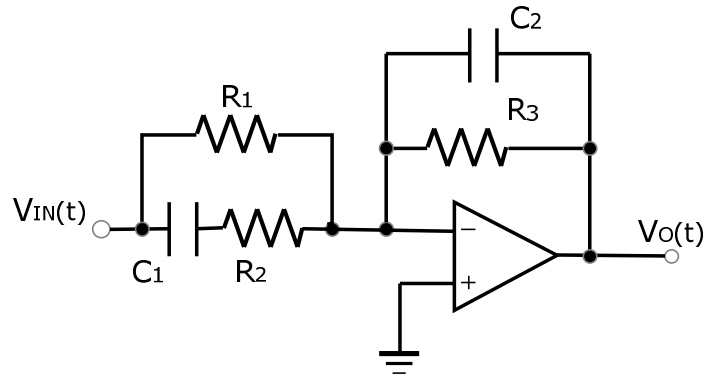
L'equazione ottenuta porta a tracciare il seguente grafico



Esercizio 2

Dato il circuito di figura, che impiega un amplificatore operazionale ideale, si richiede di:

- 3 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $W(s)=V_O/V_{IN}$;
- 4 Tracciare il diagramma asintotico di Bode del modulo e della fase (non usare l'approssimazione a gradino) di $W(s)$;
- 5 Determinare $V_O(t)$ sapendo che $V_{IN}(t)=5+10\sin(\omega t)$ [V] con i seguenti due valori di ω : i) 10^6 rad/sec; ii) 10 rad/sec.



Dati: $R_1=100\text{k}\Omega$, $R_2=1\text{k}\Omega$, $R_3=10\text{k}\Omega$, $C_1=100\text{nF}$, $C_2=1\text{pF}$.

Soluzione

3)

Dominio di s

Detta Z_2 l'impedenza serie ohmico-capacitiva del ramo di ingresso e Z_3 quella del parallelo ohmico-capacitivo di retroazione, si ha:

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1+s\tau_2}{sC_1} \quad \text{con} \quad \tau_2 = R_2C_1$$

$$Z_3 = \frac{\frac{R_3}{sC_2}}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{R_3}{1+s\tau_3} \quad \text{con} \quad \tau_3 = R_3C_2$$

Indicando con Z_i l'impedenza di ingresso, parallelo R_1 e Z_2 , si ha:

$$Z_i = \frac{\frac{R_1(1+s\tau_2)}{sC_1}}{R_1 + \frac{(1+s\tau_2)}{sC_1}} = \frac{R_1(1+s\tau_2)}{1+s(\tau_2+\tau_1)} \quad \text{con} \quad \tau_1 = R_1C_1$$

Utilizzando queste impedenze e considerato il fatto che il filtro attivo usa un operazionale nella connessione invertente, si ottiene:

$$W(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{Z_3}{Z_i} = -\frac{\frac{R_3}{(1+s\tau_3)}}{\frac{R_1(1+s\tau_2)}{1+s(\tau_2+\tau_1)}} = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1+s(\tau_2+\tau_1)}{(1+s\tau_3)(1+s\tau_2)} = A_o \frac{1+s(\tau_2+\tau_1)}{(1+s\tau_3)(1+s\tau_2)}$$

4)

Dominio $j\omega$

$$W(j\omega) = A_o \frac{1+j\omega(\tau_2+\tau_1)}{(1+j\omega\tau_3)(1+j\omega\tau_2)} = A_o \frac{1+\frac{j\omega}{\omega_{12}}}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_3}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_2}\right)}$$

con

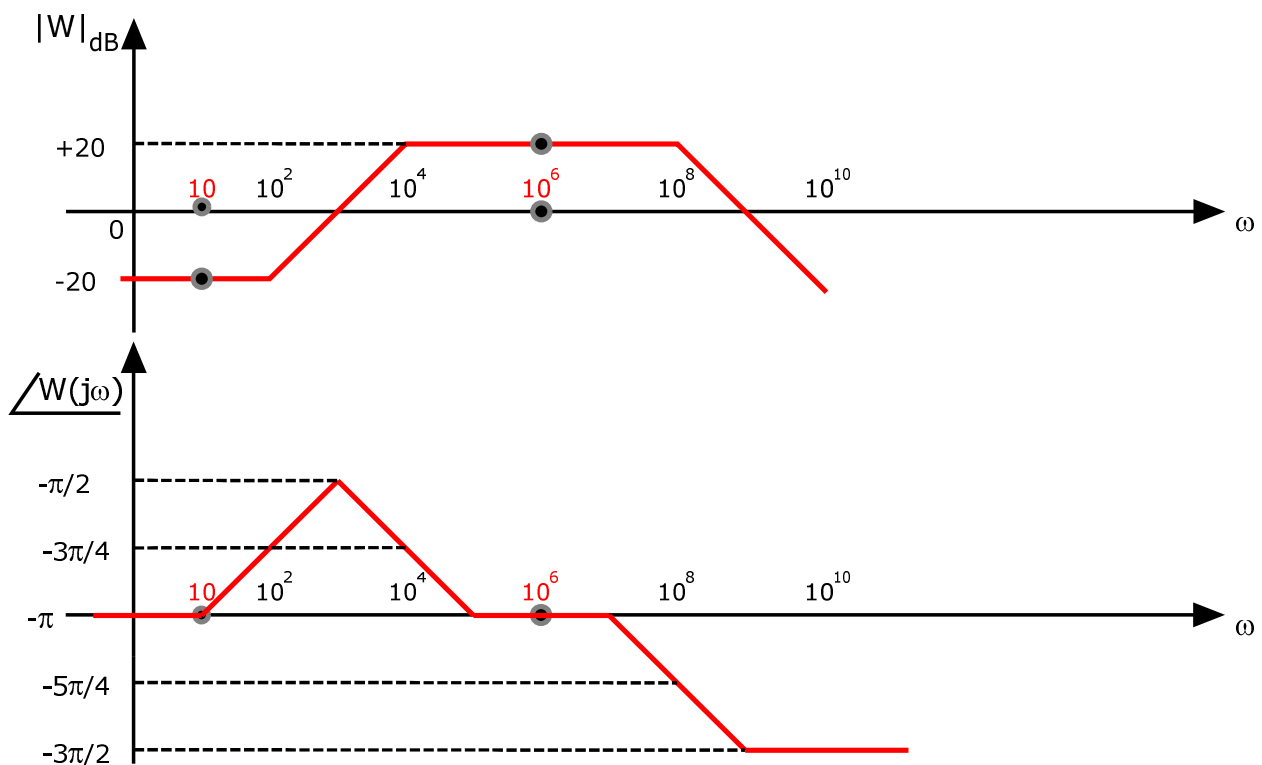
$$|A_o| = \frac{R_3}{R_1} = \frac{10k\Omega}{100k\Omega} = 0,1 \quad \angle A_o = -\pi$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1}{(R_1 + R_2)C_1} = \frac{1}{101k\Omega \cdot 100nF} \cong 100 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\tau_3} = \frac{1}{R_3 C_2} = \frac{1}{10k\Omega \cdot 1pF} = 10^8 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{R_2 C_1} = \frac{1}{1k\Omega \cdot 100nF} = 10^4 \text{ rad/sec}$$

Con questi parametri si tracciano i diagrammi asintotici di Bode della funzione di trasferimento caratterizzata da uno zero (a pulsazione più bassa) e da due poli (per pulsazioni crescenti: prima ω_2 e poi ω_3).



5) Il segnale di ingresso $v_{IN}(t) = 5 + 10\sin(\omega t)$ si compone di una componente continua e di una componente sinusoidale. Dato che la componente continua ha pulsazione nulla (a $-\infty$ nei grafici di Bode), si hanno nei due casi le seguenti risposte:

$$\omega = 10 \text{ rad/sec} \begin{cases} \omega = 0 & |W(j0)| = 10^{\frac{-20}{20}} = 0,1 & \underline{|W(j0)|} = -\pi \\ \omega = 10 & |W(j10)| = 10^{\frac{-20}{20}} = 0,1 & \underline{|W(j10)|} = -\pi \end{cases} \rightarrow v_o(t) = -0,5 + 1 \cdot \sin(10t - \pi)$$

$$\omega = 10^6 \text{ rad/sec} \begin{cases} \omega = 0 & |W(j0)| = 10^{\frac{-20}{20}} = 0,1 & \underline{|W(j0)|} = -\pi \\ \omega = 10^6 & |W(j10^6)| = 10^{\frac{20}{20}} = 10 & \underline{|W(j10^6)|} = -\pi \end{cases} \rightarrow v_o(t) = -0,5 + 100 \cdot \sin(10^6 t - \pi)$$