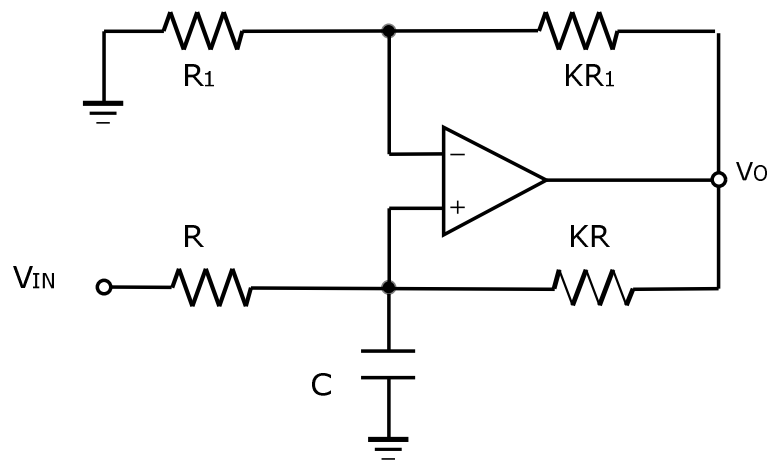


## PRIMO HOMEWORK 2009

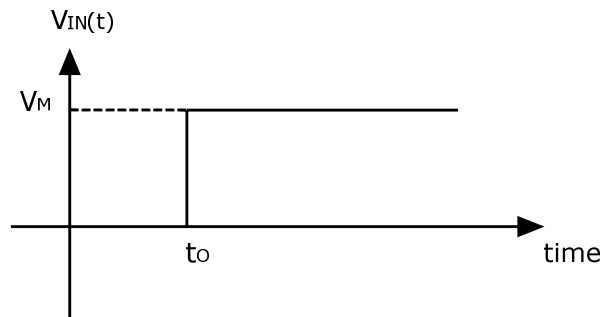
### ESERCIZIO 1

Dato il circuito di figura, che impiega un amplificatore operazionale ideale, si richiede di:

1. determinare l'espressione della funzione di trasferimento ( $W(s)$ );
2. calcolare e tracciare l'andamento della tensione di uscita nel caso in cui la tensione di ingresso sia la funzione a gradino mostrati in figura (considerare il condensatore inizialmente scarico).



Dati:  $R_1=10\text{k}\Omega$ ,  $R=20\text{k}\Omega$ ,  $K=10$ ,  $C=100\mu\text{F}$ ,  $V_M=10\text{V}$



Soluzione

1)

Dominio di  $s$

Applicando il primo principio di Kirchhoff al nodo comune di  $R$ ,  $KR$  e  $C$ , si ottiene:

$$\frac{V_{IN} - V^+}{R} = \frac{V^+ - (K+1)V^+}{KR} + sCV^+$$

$$V^+ = \frac{1}{sRC} V_{IN}$$

$$V_O = \frac{(K+1)}{sRC} V_{IN}$$

In definitiva

$$W(s) = \frac{V_O}{V_{IN}} = \frac{(K+1)}{sRC}$$

La seconda relazione si poteva scrivere direttamente ricordando il risultato del convertitore V-I che, nell'ipotesi verificata che  $\mathbf{R_1 \cdot KR = R \cdot KR_1}$ , genera sulla capacità una corrente costante data da  $\mathbf{V_{IN}/R}$ . Applicando successivamente la Legge di Ohm alla reattanza capacitiva si ottiene lo stesso risultato

2)

Considerando la  $\mathcal{L}$ -trasformata del segnale di ingresso a gradino ritardato di  $t_o$  si ha:

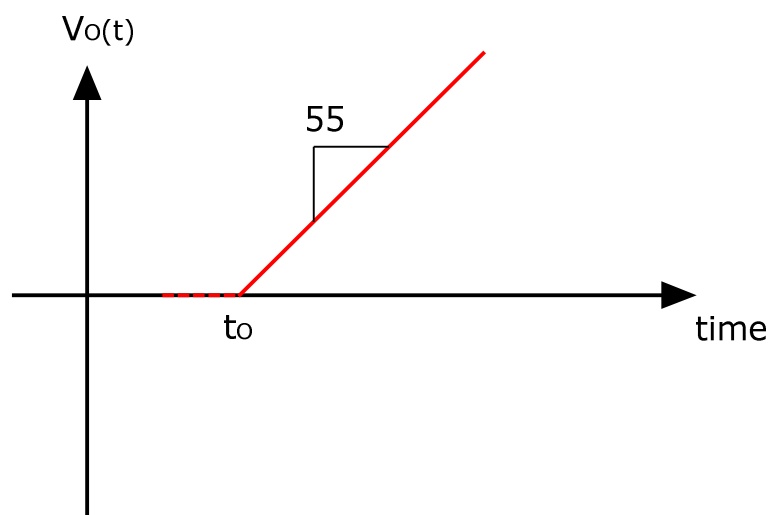
$$V_O = \frac{K+1}{sRC} \frac{V_M}{s} e^{-st_o}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$V_O = \frac{(10+1)}{20 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} s} \left( \frac{10}{s} \cdot e^{-st_o} \right) = \frac{5,5}{s} \cdot \left( \frac{10}{s} \cdot e^{-st_o} \right) = \frac{55}{s^2} \cdot e^{-st_o}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$v_O(t) = 5,5 \int_{t_o}^t v_{IN}(t) dt = 55(t - t_o) \quad \text{per } t > t_o$$

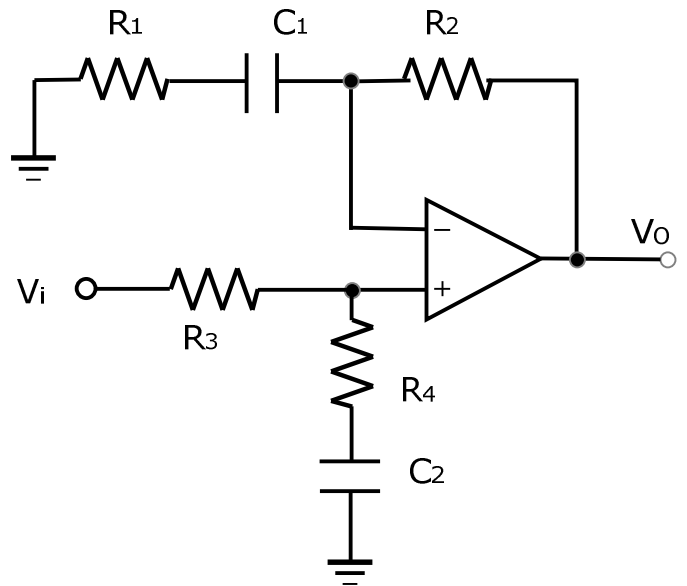


## ESERCIZIO 2

Dato il circuito di figura, che impiega un amplificatore operazionale ideale, si richiede di:

- 3) Determinare l'espressione della funzione di trasferimento  $\mathbf{W(s)=V_o/V_i}$ ;
- 4) Tracciare il diagramma asintotico di Bode del modulo e della fase (non usare l'approssimazione a gradino) di  $\mathbf{W(s)}$ ;
- 5) Determinare  $\mathbf{V_o(t)}$  sapendo che  $\mathbf{V_i(t)=3+4\sin(\omega t)}$  [V] con il seguente valore di  $\omega=10^5$  rad/s.

Dati:  $R_1=10\Omega$ ,  $R_2=5M\Omega$ ,  $R_3=2M\Omega$ ,  $R_4=10\Omega$ ,  $C_1=1nF$ ,  $C_2=10nF$ .



### Soluzione

3)

#### Dominio di $s$

Detta  $Z_1$  l'impedenza serie ohmico-capacitiva composta da  $R_1$  e  $C_1$  e  $Z_2$  quella del ramo ohmico-capacitivo formato da  $R_4$  e  $C_2$ , si ha:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{Z_1}\right) V^+$$

$$V^+ = \frac{Z_2}{Z_2 + R_3} V_i$$

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{Z_1}\right) \frac{Z_2}{Z_2 + R_3} V_i$$

Tenendo presente che:

$$Z_1 = \frac{1 + sR_1C_1}{sC_1}$$

$$Z_2 = \frac{1 + sR_4C_2}{sC_2}$$

si ottiene:

$$W(s) = \frac{V_o}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{Z_1}\right) \frac{Z_2}{Z_2 + R_3} = \left(1 + \frac{R_2}{\frac{1+sR_1C_1}{sC_1}}\right) \frac{\frac{1+sR_4C_1}{sC_2}}{\frac{1+sR_4C_1}{sC_2} + R_3} = \frac{1+s(R_2+R_1)C_1}{(1+sR_1C_1)} \frac{1+sR_4C_2}{(1+s(R_4+R_3)C_2)}$$

4)

### Dominio $j\omega$

Si tratta di una f. di t. con due zeri e due poli con i seguenti valori

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{10\Omega \cdot 1nF} = 10^8 \text{ rad/sec} \quad (\text{polo})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_4C_2} = \frac{1}{10\Omega \cdot 10nF} = 10^7 \text{ rad/sec} \quad (\text{zero})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{(R_2+R_1)C_1} \cong \frac{1}{5M\Omega \cdot 1nF} = 200 \text{ rad/sec} \quad (\text{zero})$$

$$\omega_4 = \frac{1}{(R_4+R_3)C_2} \cong \frac{1}{2M\Omega \cdot 10nF} = 50 \text{ rad/sec} \quad (\text{polo})$$

Pensando di scrivere un'espressione che mette in evidenza il guadagno di centro banda nell'intervallo di pulsazioni comprese tra  $\omega_4, \omega_3$ , basse frequenze e  $\omega_2, \omega_1$ , alte frequenze, si ha:

$$W(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_4}\right)} = \frac{\omega_4}{\omega_3} \frac{(j\omega + \omega_3)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{(j\omega + \omega_4)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)} = A_o \frac{(j\omega + \omega_3)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{(j\omega + \omega_4)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)}$$

con

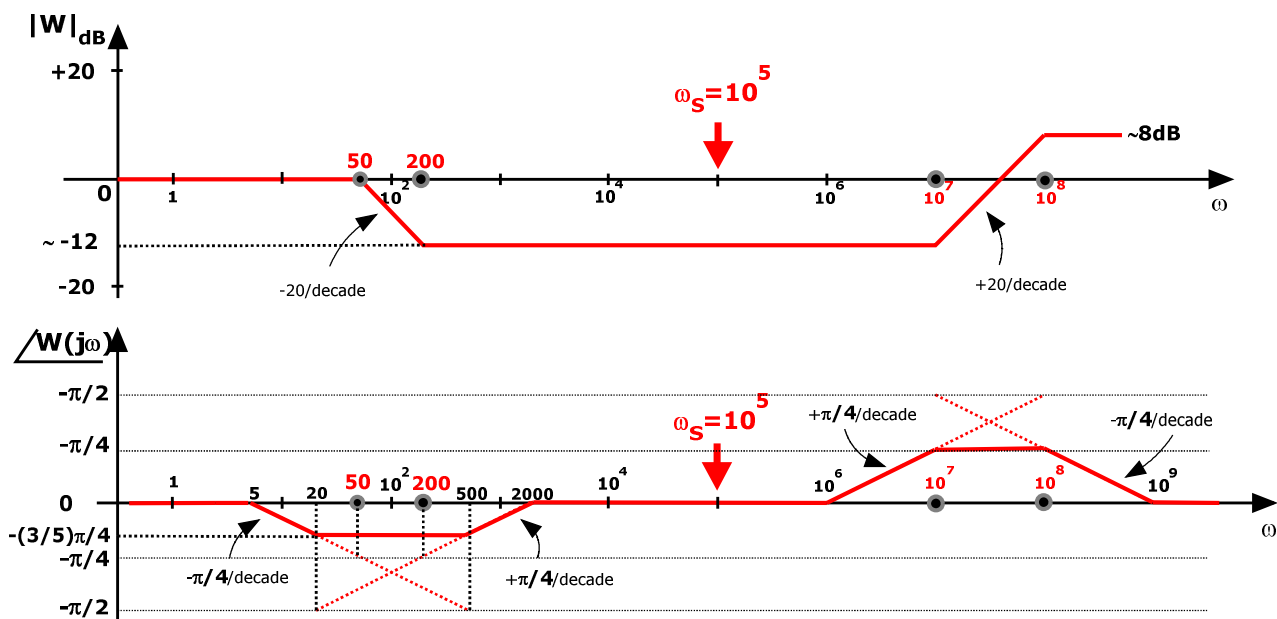
$$A_o = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{(R_2+R_1)C_1}{(R_4+R_3)C_2} = \frac{50}{200} = 0,25$$

Dalla f. di t. si possono scrivere le seguenti espressioni di modulo (in dB) e fase

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{200}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10^7}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{50}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10^8}\right)^2}$$

$$\angle W(j\omega) = \arctg \frac{\omega}{200} + \arctg \frac{\omega}{10^7} - \arctg \frac{\omega}{50} - \arctg \frac{\omega}{10^8}$$

dalle quali si determinano i diagrammi asintotici di Bode



Dall'espressione della f. di t. si possono ricavare i valori asintotici del diagramma dei moduli per  $\omega \rightarrow 0$  e per  $\omega \rightarrow \infty$ . Si ha

$$W(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_4}\right)}$$

$$\begin{cases} |W(j0)| = 1 & \rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB} \\ W(j\infty) = \frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_3 \omega_2} = \frac{10^8 \cdot 50}{200 \cdot 10^7} = 2,5 & \rightarrow 20 \log 2,5 \cong 8 \text{ dB} \end{cases}$$

5) Il segnale di ingresso  $v_i(t) = 3 + 4\sin(\omega t)$  si compone di una componente continua (a  $-\infty$  nei grafici di Bode) e di una componente sinusoidale. Per le due componenti del segnale, dai diagrammi di Bode, si hanno le seguenti risposte:

$$\begin{cases} \omega = 0 & |W(j0)| = 10^{\frac{0}{20}} = 1 \\ \omega = 10^5 & |W(j10^5)| = 10^{\frac{-12}{20}} = 0,25 \\ & \underline{|W(j10^5)| = 0} \end{cases}$$

$$v_o(t) = 3 + 1 \cdot \sin(10^5 t)$$