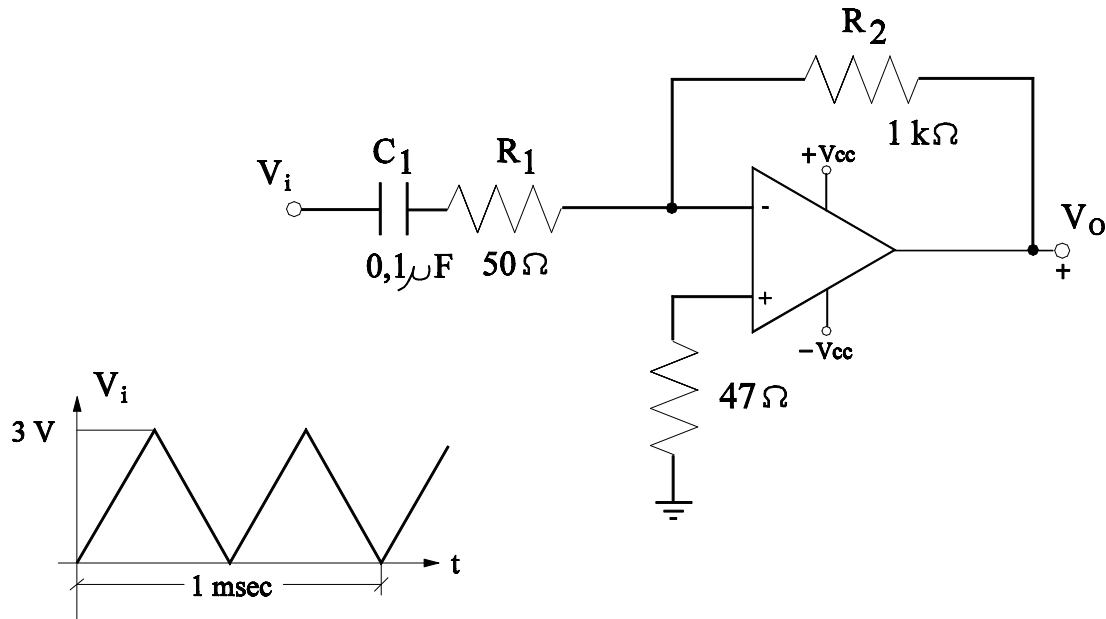


Problema 5-24

Dato il circuito derivatore mostrato in figura

1. determinare la funzione di trasferimento $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$
2. tracciare i diagrammi di Bode
3. disegnare la forma d'onda del segnale di ingresso rappresentato.

La tensione DC in ingresso è 1,5 V.



Soluzione

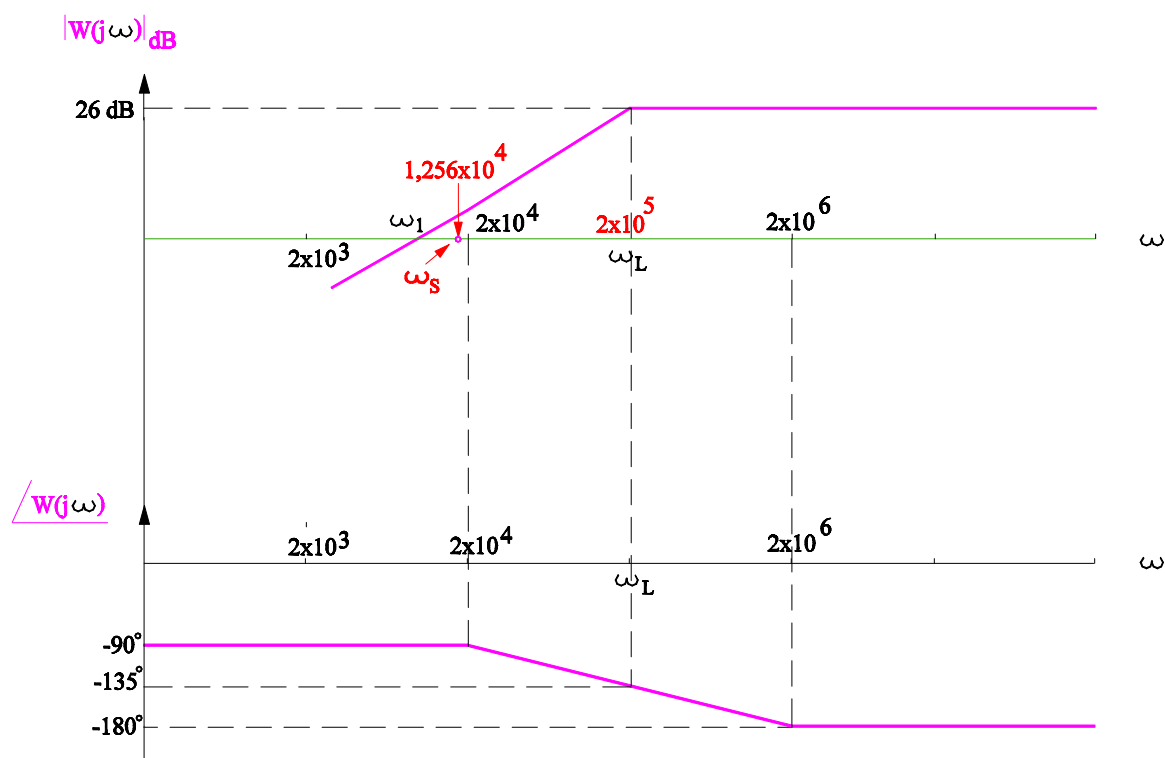
1. E' richiesta la funzione di trasferimento in regime sinusoidale per cui:

$$W(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = - \frac{R_2}{R_1} \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{R_1 C_1}} = A_\infty \frac{j\omega}{j\omega + \omega_L} = A_\infty \frac{\frac{j\omega}{\omega_L}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_L}}$$

con

$$A_\infty = - \frac{R_2}{R_1} = - \frac{1000\Omega}{50\Omega} = -20 \quad \mathbf{e} \quad \omega_L = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 200k \frac{rad}{sec}$$

2. Si riconosce facilmente che il circuito è il filtro passa alto per cui si ottengono i seguenti grafici:



ricavati dalle relazioni:

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_{\infty} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_L} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2}$$

$$\angle W(j\omega) = \angle A_{\infty} + \angle j \frac{\omega}{\omega_L} - \angle 1 + j \frac{\omega}{\omega_L} = -180^\circ + 90^\circ - \arctg \frac{\omega}{\omega_L}$$

Dalla prima si deduce che il guadagno nella banda passante

risulta: $20 \log A_{\infty} = 20 \log 20 \cong 26 \text{ dB}$

La seconda relazione mostra che la fase è compresa nell'intervallo $-90^\circ, -180^\circ$ (invece che tra 0° e 90°) a causa del valore negativo di A_{∞} che introduce uno sfasamento di -180° .

3. Il segnale periodico di ingresso, scomposto in serie di Fourier, fornisce uno sviluppo armonico la cui fondamentale ha una frequenza:

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0,5 \text{ msec}} = 2 \text{ kHz}$$

La pulsazione di questa sinusoide è

$$\omega_s = 2\pi f_s = 1,256 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Riportando questo valore sui grafici di Bode si osserva che la pulsazione della prima armonica è oltre una decade al disotto della banda passante. Si può, in prima approssimazione affermare che:

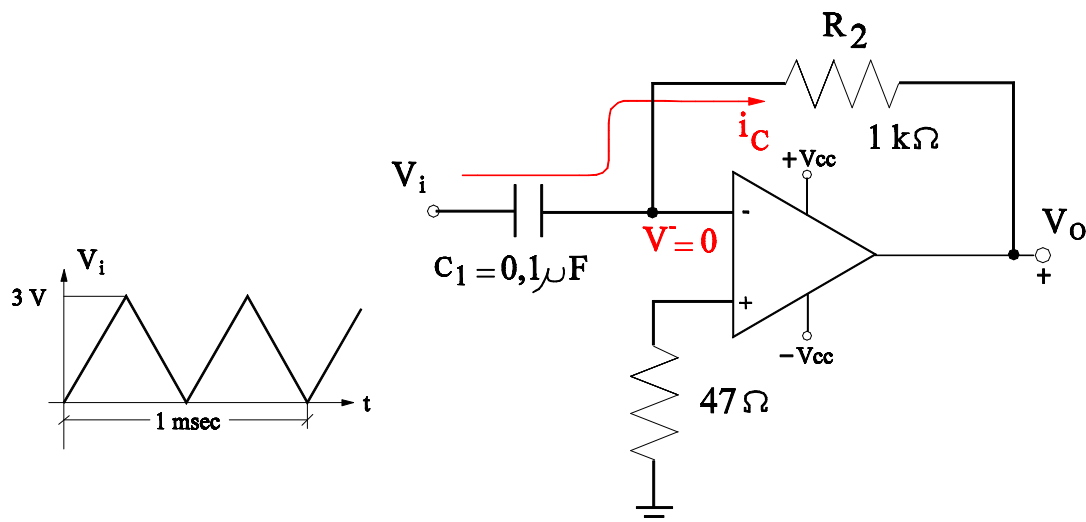
$$\omega_s \ll \omega_L = \frac{1}{R_1 C_1}$$

dalla quale si ricava

$$\frac{1}{\omega_s C_1} \gg R_1$$

in base alla quale si può affermare che, alla pulsazione del segnale di ingresso, la resistenza R_1 risulta trascurabile rispetto alla reattanza capacitiva.

In ragione di ciò si può valutare, con buona approssimazione, la risposta del seguente circuito



Si ricava facilmente

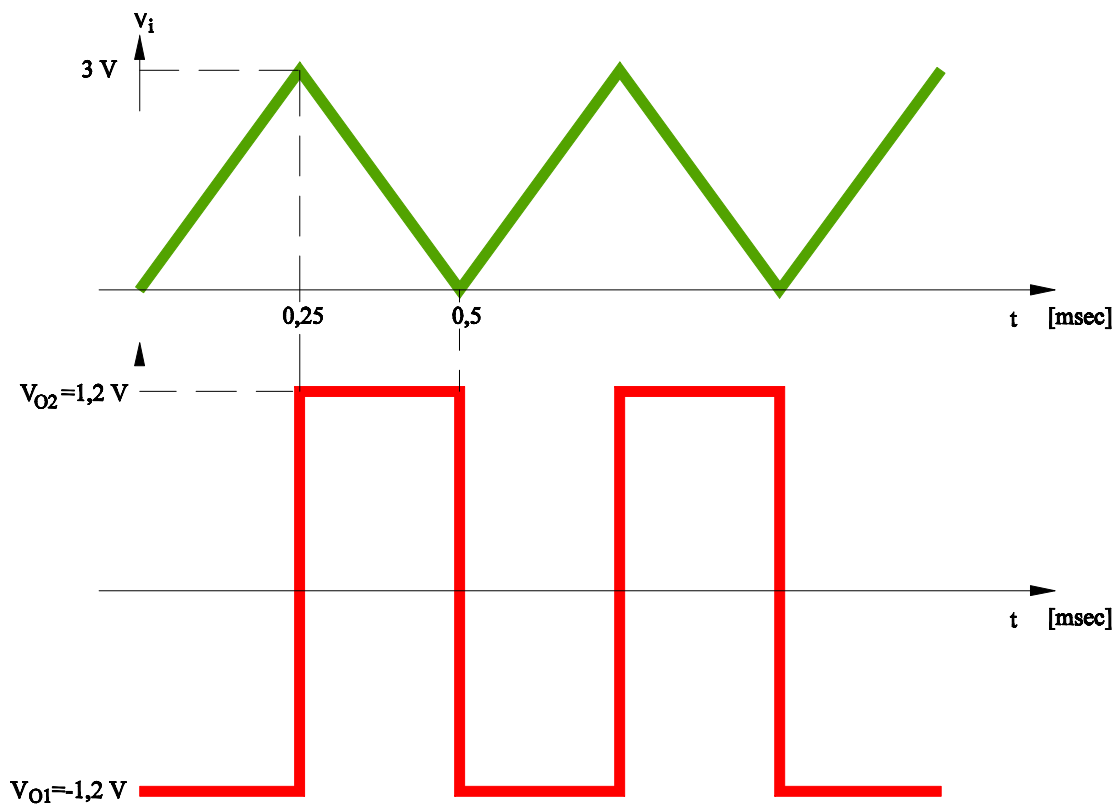
$$i_c = C_1 \frac{dv_c}{dt} = C_1 \frac{dv_i}{dt}$$

$$v_o = -R_2 i_c = -R_2 C_1 \frac{dv_i}{dt} = -\tau \frac{dv_i}{dt}$$

con $\tau = R_2 C_1 = 1k\Omega \cdot 0,1\mu F = 0,1 \text{ m sec}$

$$v_o = -0,1 \text{ m sec} \frac{dv_i}{dt}$$

Applicando questa relazione ai due fronti di salita e di discesa dell'onda triangolare di ingresso si ottiene il risultato mostrato nella seguente figura



I valori numerici indicati nel grafico si ricavano dalle

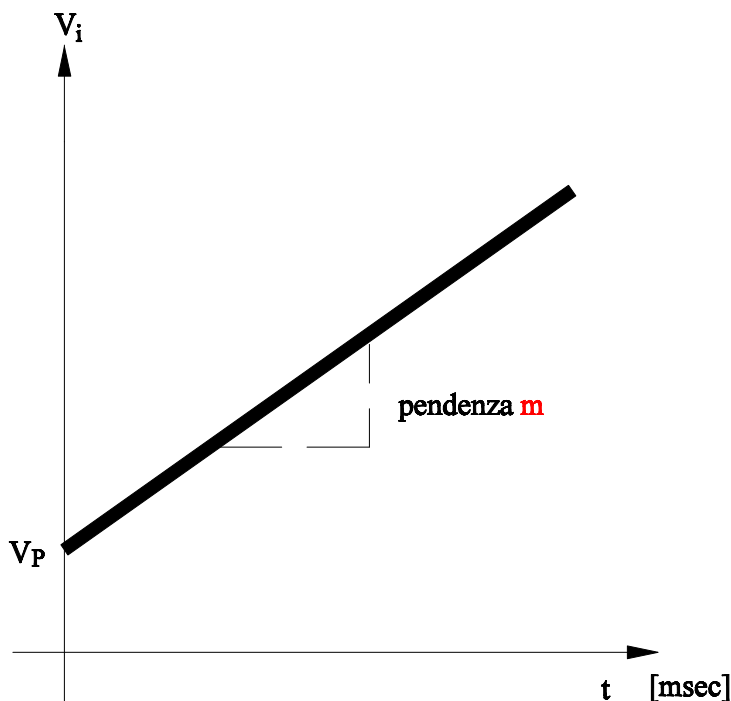
$$v_{o1} = -0,1m \text{ sec} \frac{3V}{0,25m \text{ sec}} = -1,2V$$

$$v_{o2} = -0,1m \text{ sec} \frac{-3V}{0,25m \text{ sec}} = 1,2V$$

(opzionale)

Volendo valutare la risposta senza l'approssimazione precedente si può considerare il segnale triangolare come una successione di segnali a rampa di equazione:

$$v_i = mt + V_P$$



Considerando, in generale, che il condensatore può essere inizialmente carico al valore V_c , per il ramo di ingresso si possono scrivere la seguente relazione alle L-trasformate

$$V_i = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} \right) I_c + \frac{V_c}{s} = \frac{m}{s^2} + \frac{V_p}{s}$$

$$I_c = \frac{\frac{m}{s^2} + \frac{V_p}{s} - \frac{V_c}{s}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{\frac{m}{s} + V_p - V_c}{R_1 \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}$$

$$V_o = -R_2 I_c = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\frac{m}{s} + V_p - V_c}{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)} = -\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{m}{s \left(s + \frac{1}{\tau_1} \right)} + \frac{V_p - V_c}{\left(s + \frac{1}{\tau_1} \right)} \right]$$

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{\tau_1 m}{s} - \frac{\tau_1 m}{s + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{V_p - V_c}{s + \frac{1}{\tau_1}} \right] \quad \text{dove} \quad \tau_1 = R_1 C_1$$

Antitrasformando si ottiene il seguente segnale di uscita:

$$v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} \tau_1 m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) - \frac{R_2}{R_1} (V_p - V_c) e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Applicando questa equazioni ai tratti di rampa successivi (vedi figura successiva) e particolarizzando per ogni tratto i valori di V_p e V_c , si ottiene

Tratto 0A

$$V_p = 0 \quad V_c = 0$$

$$v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} \tau m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) = -20 \cdot 5 \mu \text{ sec} \frac{3V}{0,25m \text{ sec}} \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \mu \text{ sec}}} \right)$$

$$v_o(t) = -1,2 \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \mu \text{ sec}}} \right)$$

Tratto AT

$$V_P = 3V \quad V_C = v_i - R_1 i_C = v_i - R_1 \frac{V_{R2}}{R_2} = 3V - 50\Omega \frac{1,2V}{1k\Omega} = 2,94V$$

$$v_o(t) = -20 \cdot 5\mu \text{ sec} \left(-\frac{3V}{0,25m \text{ sec}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}} \right) - 20(3V - 2,94V) e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}}$$

$$v_o(t) = 1,2 - 2,4e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}} \quad [Volt]$$

Tratto TB

$$V_P = 0 \quad V_C = v_i - R_1 i_C = v_i - R_1 \frac{V_{R2}}{R_2} = 0 - 50\Omega \frac{-1,2V}{1k\Omega} = 60mV$$

$$v_o(t) = -20 \cdot 5\mu \text{ sec} \left(\frac{3V}{0,25m \text{ sec}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}} \right) - 20(0 - 60mV) e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}}$$

$$v_o(t) = -1,2 + 2,4e^{-\frac{t}{5\mu \text{ sec}}} \quad [Volt]$$

etc...

Dato che la costante di tempo $\tau_1 = R_1 C_1 = 5\mu\text{sec}$ risulta molto inferiore a $T/2 = 250\mu\text{sec}$, gli esponenziali hanno valore praticamente nullo al termine di ogni segmento di rampa. Ne segue che gli intervalli **AT** e **TB** si ripetono identici in modo stazionario. La seguente figura mostra, qualitativamente il grafico della risposta (per la costante τ_1 non è stata rispettata la scala dei tempi)

