

1.9 Sistemi lineari – Funzione di trasferimento

Si chiamano **sistemi lineari** quei sistemi che soddisfano alle seguenti due proprietà:

a) se Y è l'uscita del sistema in risposta all'ingresso X , allora la risposta all'ingresso kX , con k una costante qualsiasi, è kY .

b) se Y_1 è la risposta al segnale X_1 e Y_2 è la risposta a X_2 , la risposta a $X_1 + X_2$ è $Y_1 + Y_2$.

Con riferimento alla proprietà b), si dice che un sistema lineare obbedisce al **principio di sovrapposizione degli effetti** secondo il quale l'uscita Y prodotta dall'ingresso X , somma di due ingressi $X = X_1 + X_2$, è uguale alla somma delle uscite Y_1 e Y_2 prodotte da ogni ingresso singolarmente ($Y = Y_1 + Y_2$).

Le due proprietà di un sistema lineare si possono sintetizzare dicendo che la risposta ad un ingresso dato da $k_1 X_1 + k_2 X_2$ è data da $k_1 Y_1 + k_2 Y_2$ con Y_1 e Y_2 risposte, rispettivamente a X_1 e X_2 e k_1 e k_2 costanti arbitrarie.

Si nota che per i sistemi per i quali esiste *proporzionalità diretta* tra ingresso e uscita sono rispettate entrambe le proprietà a) e b) perciò questi sistemi sono lineari. La Fig.1.9.1 mostra un modello grafico di un sistema lineare ed illustra il principio di sovrapposizione degli effetti. Il potenziometro è quindi un sistema lineare e, dato che i parametri che lo caratterizzano non variano nel tempo, il potenziometro è un sistema lineare e stazionario.

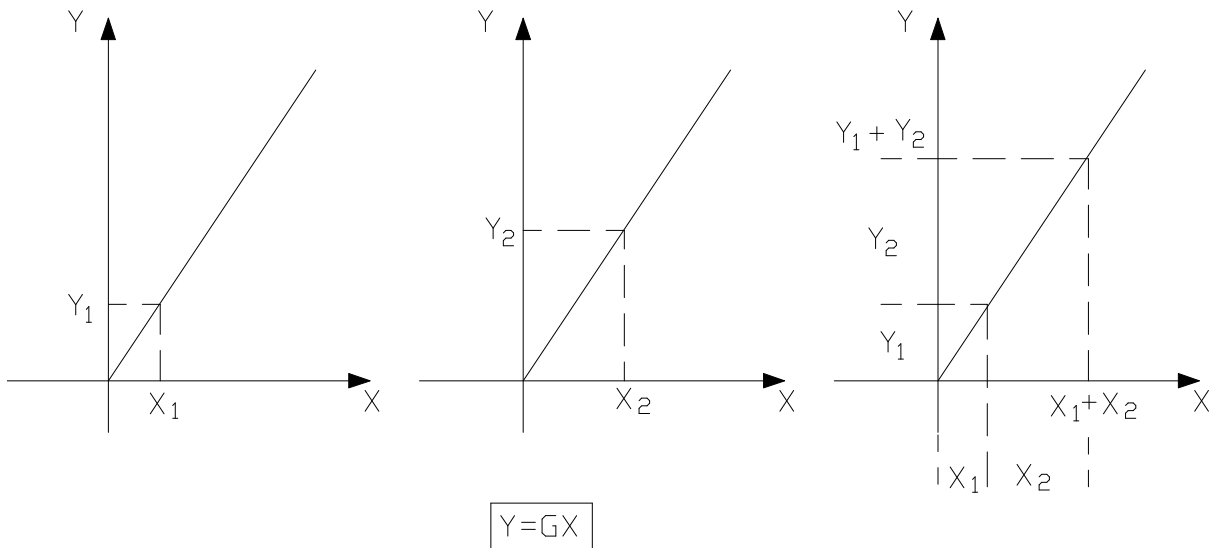


Fig.1.9.1 Modello grafico di un sistema lineare descritto dalla funzione di trasferimento G . I tre grafici illustrano il principio di sovrapposizione degli effetti.

La classe dei **sistemi lineari e stazionari** è di notevole importanza, dato che è quella maggiormente studiata e della quale si conoscono molte importanti proprietà. Nella pratica i sistemi utilizzati, in particolare i sistemi di controllo, presentano non linearità più o meno accentuate, oltre a inevitabili variazioni dei parametri, specie nei tempi lunghi. Ci si riferirà, in ogni modo nel seguito, ai sistemi lineari e stazionari che approssimano efficacemente molti casi pratici e che possono costituire un'utile premessa per prevedere il comportamento di quelli che non sono tali nemmeno in prima approssimazione.

Con riferimento ad un sistema lineare, si definisce **funzione di trasferimento** (abbreviata f. di t.) del sistema il rapporto tra la grandezza di uscita e quella di ingresso. Ricordando ancora l'esempio del potenziometro, la sua f. di t. è data da

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.9.1)$$

1.10 Connessione di sistemi - Algebra dei blocchi

I sistemi possono essere inoltre *interconnessi*, per realizzare sistemi più complessi, rappresentabili con degli schemi a blocchi che si ottengono collegamento in modo adeguato i blocchi rappresentanti ciascun *sottosistema* componente. È importante rilevare sin d'ora che, in molte applicazioni pratiche, la connessione di sistemi conferisce, al sistema complessivo, delle caratteristiche che non sono la semplice somma delle caratteristiche di ogni sistema componente. Come si vedrà nello studio della dinamica dei sistemi il sistema complessivo può avere un comportamento adeguato all'utilizzazione pratica prevista anche se le singole parti componenti presentano risposte inadeguate. Rinviamo ad un paragrafo successivo quest'analisi più approfondita, ci si limita, in questa parte introduttiva, a dimostrare come, di una data connessione di sottosistemi, esistano diverse connessioni equivalenti, aventi, cioè, la stessa f. di t. complessiva.

Per motivi di semplicità, inoltre, in questa prima analisi, si riterranno i singoli sottosistemi componenti dei sistemi statici, perciò si potranno ritenere *istantanei* i cambiamenti dell'uscita di ogni sottosistema, rispetto al cambiamento del relativo ingresso. Il modello fatto per il potenziometro, come già detto, rappresenta un sistema istantaneo.

In realtà, ogni sistema reale introduce ritardi inevitabili, che possono produrre, nel sistema complessivo, a causa delle energie immagazzinate al suo interno, dei fenomeni transitori, da non trascurare ai fini di un'eventuale utilizzazione pratica.

Per questi motivi lo studio di un sistema fisico può essere condotto inizialmente analizzando il comportamento a fenomeni transitori ultimati, o come si suole dire in **condizioni di regime**. In questa fase le funzioni di trasferimento sono considerate delle costanti, perciò si utilizza un modello statico del sistema reale. In una fase successiva, si possono scrivere delle f. di t. che tengono conto anche delle fasi transitorie e studiare le **condizioni dinamiche** del sistema, nel passaggio da una situazione di regime ad un'altra, in risposta a prefissati cambiamenti degli ingressi.

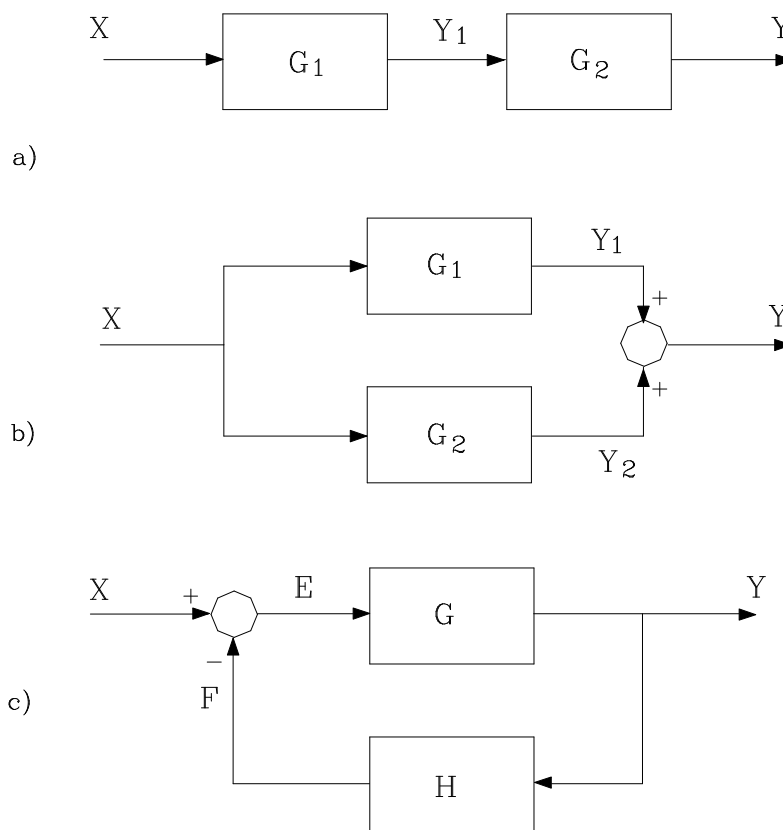


Fig.1.10.1 a) Collegamento di due sistemi in cascata (o serie). b) Collegamento di due sistemi in parallelo. c) Collegamento di due sistemi in retroazione.

La connessione di più sistemi, per quanto complessa sia, si può ricondurre alla composizione delle seguenti tre connessioni elementari:

- **connessione in cascata**
- **connessione in parallelo**
- **connessione in retroazione**

La Fig.1.10.1 mostra la struttura di queste tre connessioni. In questi schemi con X e Y si sono indicati rispettivamente ingresso e uscita globali della connessione. In ogni schema sono stati indicati anche le grandezze di ingresso e di uscita di ogni blocco. Negli schemi a blocchi di Fig.1.10.1 a) e b) si è introdotto un nuovo blocco, di forma circolare, che esprime la somma algebrica degli ingressi indicati nei segmenti orientati afferenti al blocco, con il segno indicato nel punto d'incidenza. Il risultato della somma algebrica è indicato nell'unico segmento orientato uscente dal blocco.

La connessione in cascata di due sistemi si ottiene inviando l'uscita del primo blocco, con f. di t. G₁, all'ingresso del secondo. Questo tipo di connessione può essere esteso a qualunque numero di sistemi in cascata. La connessione in parallelo di due sistemi invia in ingresso ad entrambi i sistemi la stessa grandezza, mentre le uscite vengono sommate per fornire l'uscita globale. Infine la connessione di sistemi con retroazione, vedi Fig.1.10.1 c), ha come uscita globale quella del blocco con f. di t. indicata con G. Questo blocco costituisce la **catena diretta** del sistema retroazionato. L'uscita del sistema è anche l'ingresso del blocco con f. di t. indicata con H, la cui uscita F, viene rinviata all'ingresso e sottratta alla grandezza X, per produrre l'ingresso del blocco G. Il blocco H costituisce la catena inversa del sistema retroazionato. La grandezza di ingresso X, per i motivi che saranno spiegati più avanti, è chiamata **grandezza** (o **segnale**) **di riferimento**, mentre il blocco che esegue la somma algebrica è chiamato **nodo di confronto**.

Si ricorda che uno schema a blocchi è un modello astratto di un sistema, che rende “visiva” una relazione matematica. Così, ad esempio, il blocco elementare di Fig.1.1.2 indica, come più volte affermato, che l'uscita Y corrisponde al prodotto dell'ingresso X per la f. d. t. G; si ha, cioè, $Y=GX$. La connessione di più blocchi, quindi, vincola le singole relazioni di ogni blocco a soddisfare ad un *sistema di equazioni* dato che alcune grandezze sono contemporaneamente uscita di alcuni blocchi e ingresso di altri. Dato che, di una o più equazioni, di questo sistema, si possono scrivere una o più forme matematiche equivalenti, ne deriva che di uno schema a blocchi si possono ricavare schemi a blocchi equivalenti. In particolare un sistema, formato da più sottosistemi interconnessi, può essere rappresentato con un unico blocco equivalente. Queste considerazioni fanno comprendere come, agendo direttamente sugli schemi a blocchi, piuttosto che sulle relazioni matematiche, sia possibile determinare schemi a blocchi equivalenti, agendo con delle regole che vanno sotto il nome di **algebra dei blocchi**.

In base a queste regole si può affermare che “due blocchi in cascata equivalgono ad un unico blocco la cui f. di t. è il prodotto delle due f. di t. componenti”. Con riferimento alla Fig.1.10.1a) si ha:

$$Y = G_1 Y_1 = G_1 G_2 X = GX \quad (1.10.1)$$

Nella (1.10.1) si è posto $G=G_1 G_2$, f. di t. del blocco equivalente ai due blocchi in cascata. Estendendo questo risultato si può affermare che la f. di t. di più blocchi in cascata è il prodotto delle singole f. di t.

Due blocchi in parallelo equivalgono ad un unico blocco la cui f. di t. è la somma delle due f. di t. componenti. Si ha, in questo caso:

$$Y = G_1 X + G_2 X = (G_1 + G_2) X = GX \quad (1.10.2)$$

Per il sistema retroazionato le relazioni rappresentate nell'ordine dal blocco della catena diretta, da quella inversa e dal nodo di confronto sono:

$$\begin{aligned} Y &= GE \\ F &= HY \\ E &= X - F \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

da cui:

$$Y = G(X - F) = G(X - HY) = GX - GHY$$

$$Y + GHY = GX$$

ed infine:

$$Y = \frac{G}{1+GH} X = W \cdot X \quad (1.10.4)$$

dove si è indicata con W la f. di t. del blocco equivalente. Si ha quindi:

$$W = \frac{G}{1+GH} \quad (1.10.5)$$

Data l'importanza del collegamento di sistemi in retroazione, un'analisi delle proprietà delle relazioni (1.10.4) e (1.10.5) sarà condotta nel paragrafo successivo.

La Fig.1.10.2 riassume i risultati ottenuti per le tre strutture fondamentali.

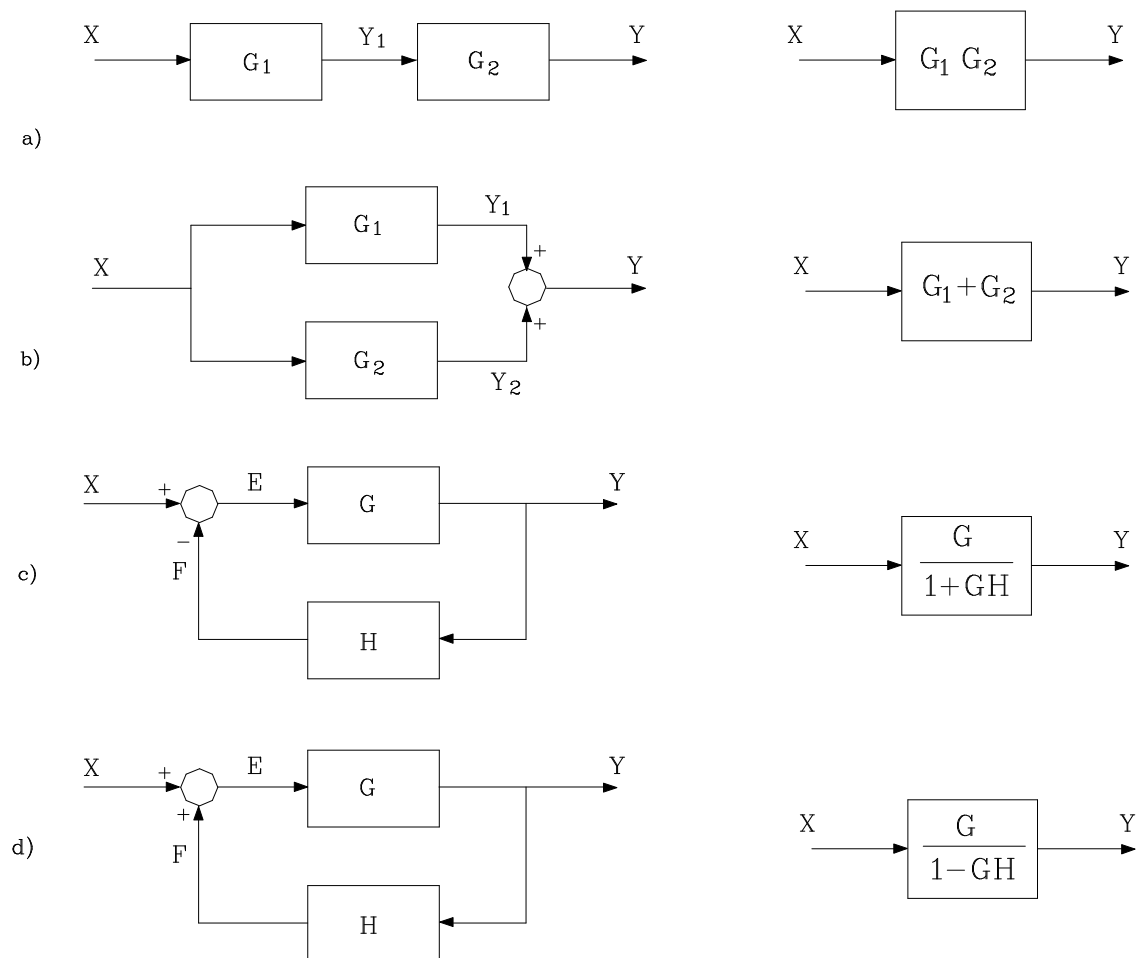


Fig.1.10.2 Strutture fondamentali degli schemi a blocchi e relativo blocco equivalente

Nella Fig.1.10.2 si è rappresentato anche il modello di un sistema retroazionato nel quale il nodo di confronto esegue la somma del segnale di ingresso con quello di retroazione, piuttosto che la differenza. Si è inserita questa seconda versione del sistema retroazionato, anche se non necessaria, per facilitare la trasformazione di schemi a blocchi più complessi in blocchi più semplici. Si lascia al lettore, comunque, il compito di ricavare la f. di t. del blocco equivalente, compito, peraltro, alquanto facile, seguendo lo stesso procedimento analitico che porta alla relazione (1.10.5).

Più in generale, vista questa stretta corrispondenza tra schemi a blocchi e relazioni matematiche, si può determinare, di ogni schema a blocchi, uno schema a blocchi equivalenti, allo scopo di facilitare l'analisi del sistema in un certo contesto. Per alcune semplici strutture, vale la pena di memorizzare queste equivalenze, per poter passare, rapidamente, da uno schema al suo equivalente, senza manipolare le corrispondenti relazioni matematiche. La Fig.1.10.3 mostra questi casi molto diffusi.

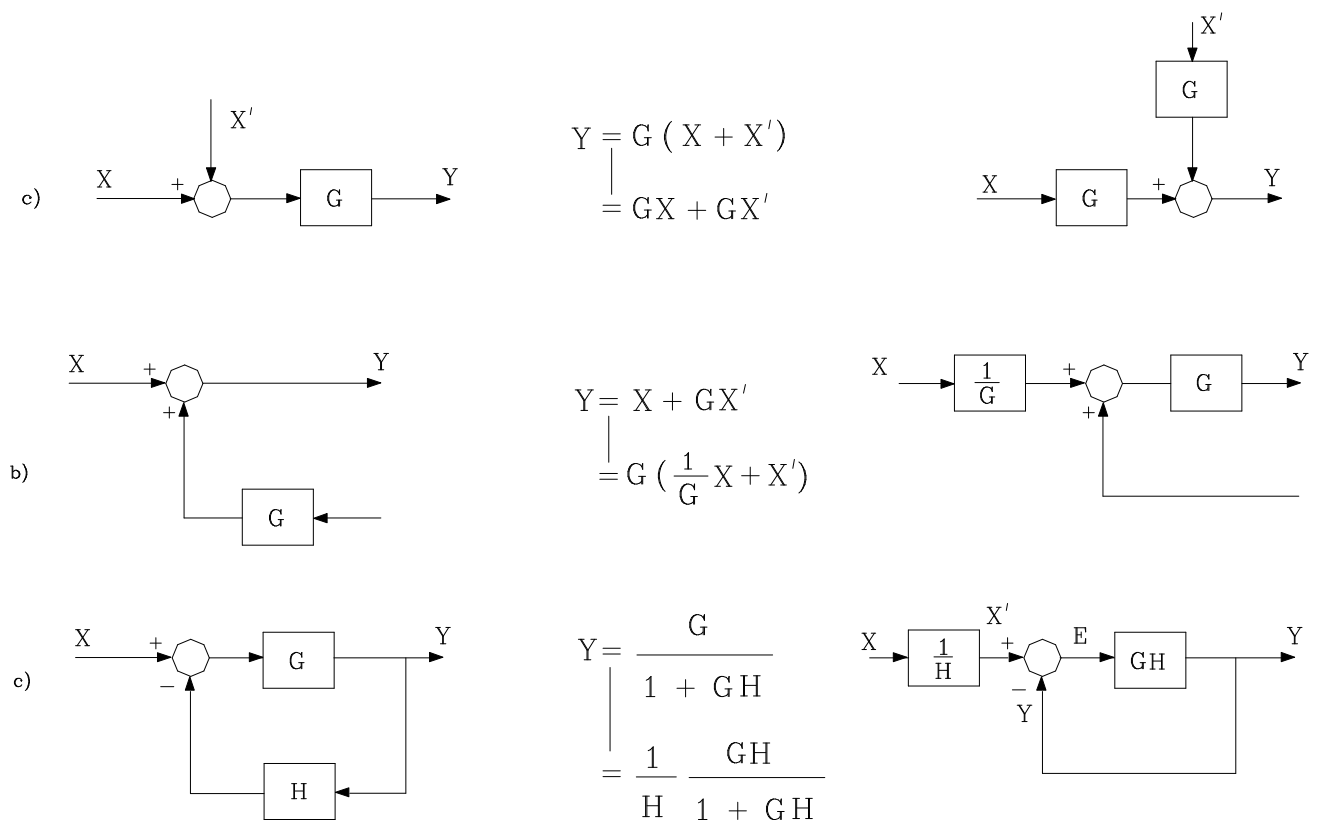


Fig.1.10.3 Schemi a blocchi equivalenti. a) Spostamento di un nodo rispetto ad un blocco. b) Spostamento di un blocco rispetto a un nodo. c) Schema equivalente con retroazione unitaria.

Le equivalenze di Fig.1.10.3a e b sono di immediata comprensione. L'equivalenza di Fig.1.10.3c richiede qualche considerazione riguardo alla catena di retroazione. Si nota infatti che la trasformazione dello schema a retroazione in quello equivalente ha prodotto una grandezza di retroazione uguale a quella di uscita Y. Ciò è equivalente ad avere $H=1$, per cui si parla di **sistema con retroazione unitaria**.