

### 1.11 - Sistemi retroazionati in regime stazionario.

Si è già ripetuto, più volte, che i sistemi retroazionati rivestono una notevole importanza pratica sia nel settore specifico dell'elettronica sia in quello, più generale, dell'automazione. Per comprendere le proprietà di questo sistema si fa, ad esempio, riferimento alla progettazione di un generico amplificatore elettronico di tensione dal quale si pretende un'amplificazione  $A_v=10$ . Si può pensare di realizzare questo sistema con l'utilizzazione di uno stadio a transistor nella connessione ad emettitore comune secondo lo schema di Fig.1.11.1a. È noto che l'amplificazione di questo circuito risulta:

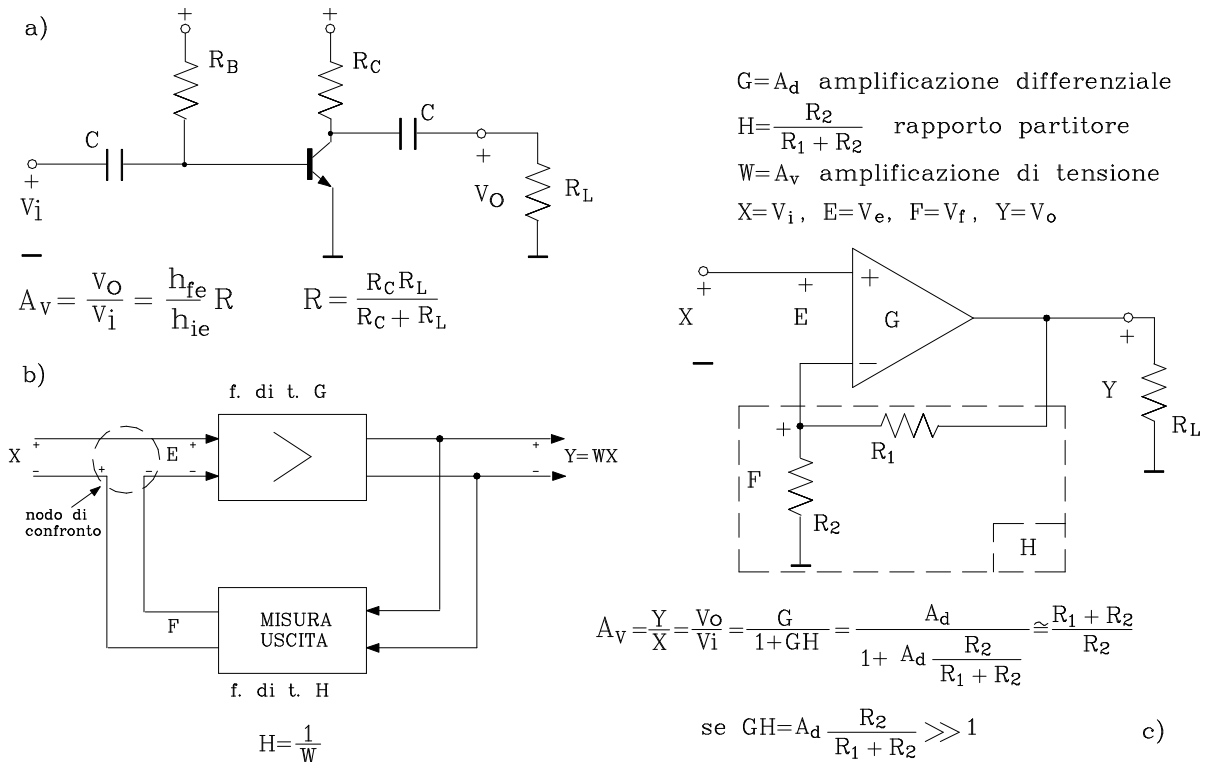
$$A_v = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} R \quad (1.11.1)$$

dove  $h_{fe}$  e  $h_{ie}$  sono due parametri costruttivi del transistor ed  $R$  è la resistenza equivalente del parallelo tra la resistenza di polarizzazione  $R_C$  e quella di carico  $R_L$ .

Per realizzare il valore di amplificazione desiderato, con approssimazione accettabile pari almeno al  $\pm 10\%$  ( $A_v$  compreso tra 9 e 11), è necessario che i parametri della formula precedente abbiano approssimazioni inferiori a questo valore. È noto che, i parametri del transistor  $h_{fe}$  e  $h_{ie}$  sono noti con precisione più scarsa, dato che l' $h_{fe}$ , in particolare, può variare, ad esempio, tra il -50% e +100% del valore nominale!

La soluzione di questo problema consiste nel pensare di realizzare un sistema organizzato in modo tale che sia prevista la *misura* dell'uscita effettiva dell'amplificatore, con un dispositivo di buona precisione e di basso costo. La misura può essere ridotta di un fattore di scala pari a  $1/A_v$ , in modo che essa coincida esattamente con il segnale d'ingresso, quando l'uscita raggiunge il valore desiderato. Confrontando questo valore con il segnale d'ingresso, mediante una semplice operazione di differenza, si ottiene come risultato il valore zero, se l'uscita è quella voluta. Per questo motivo il segnale differenza è detto **segnale di errore**. L'errore risulta positivo o negativo a seconda che l'uscita sia rispettivamente inferiore o superiore al valore desiderato.

Il sistema può essere completato pensando di utilizzare proprio questo segnale d'errore per pilotare un amplificatore non invertente che: produce l'uscita voluta ( $A_v V_i$ ), quando l'errore è nullo; riduce l'uscita, quando questa supera il valore voluto (errore negativo); aumenta l'uscita, quando questa è inferiore al valore voluto (errore positivo). Lo schema di Fig.1.11.1.a mostra la struttura del sistema complessivo che è appunto un sistema retroazionato.



**Fig.1.11.1** a) Amplificatore a emettitore comune. b) Schema di principio di un amplificatore retroazionato. c) Realizzazione con operazionale nella connessione non invertente.

Per ottenere questo funzionamento, si deve disporre di un amplificatore che fornisca una tensione d'uscita di valore diverso da zero ( $AvVi$ ), con tensione d'ingresso nulla ( $Ve=0$ ). L'amplificazione di questo sistema deve, quindi, essere infinita. Ovviamente, quest'amplificatore non esiste, anche se si può cercare di approssimare questa condizione irraggiungibile, costruendo amplificatori di tensione con amplificazione più alta possibile. La risposta tecnologica a quest'esigenza è la produzione degli amplificatori operazionali che sono disponibili con amplificazione differenziale  $Ad$  sempre più elevata. Per quantizzare i limiti di quest'approssimazione si deve determinare il legame ingresso uscita del sistema per qualunque valore dell'amplificazione.

Dalla descrizione fatta si ottiene lo schema di principio di Fig.1.11.1b che corrisponde ad una ben nota soluzione pratica di Fig.1.11.1c. Con riferimento al modello generale di Fig.1.10.1c si hanno le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} G &= A_d \\ H &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ X &= V_i \\ Y &= V_o \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

Si è quindi visto un esempio pratico di sistema retroazionato appartenente al settore dell'elettronica. Si potrebbero, con lo stesso metodo, esaminare sistemi appartenenti al settore della meccanica, della termotecnica, della chimica ecc., anche se, nel campo dell'automazione, hanno interesse sistemi in cui coesistono sottosistemi appartenenti a settori diversi. In particolare si esamineranno, nel seguito, sistemi contenti parti meccaniche o termiche, controllate da parti elettroniche, il tutto organizzato secondo una struttura a retroazione.

In questo capitolo, comunque, si continueranno ad esaminare aspetti generali che potranno, nel seguito, essere applicati ai singoli casi concreti. Le proprietà evidenziate potranno trovare riscontro nell'esempio fatto in Fig.1.11.1.

Va ribadito il fatto che in questa analisi si utilizzerà un modello statico del sistema retroazionato nel quale le f. di t. sono costanti, per cui, per ogni cambiamento dell'ingresso, si dovrà supporre che l'uscita di ogni blocco raggiunga istantaneamente il nuovo valore di regime. Sotto questo punto di vista, nel seguito, si parlerà indifferente di sistemi istantanei, statici o di uscite in condizioni di regime. Lo studio, come già preannunciato, delle fasi transitorie da una condizione di regime ad un'altra, verrà affrontato successivamente, quando saranno introdotte rappresentazioni più aderenti ai sistemi fisici reali delle funzioni di trasferimento.

Fatte queste premesse e riprendendo in esame la relazione generale (1.10.5) valida per un sistema retroazionato con diagramma a blocchi illustrato in Fig.1.10.1c, si dimostrano le seguenti proprietà:

- indipendenza da  $G$  per  $GH \gg 1$

Dalla relazione (1.10.4) si osserva che, se la f. di t.  $G$  è sufficientemente elevata, in modo tale che il prodotto  $GH$  sia molto maggiore dell'unità, si può approssimare l'espressione nel seguente modo:

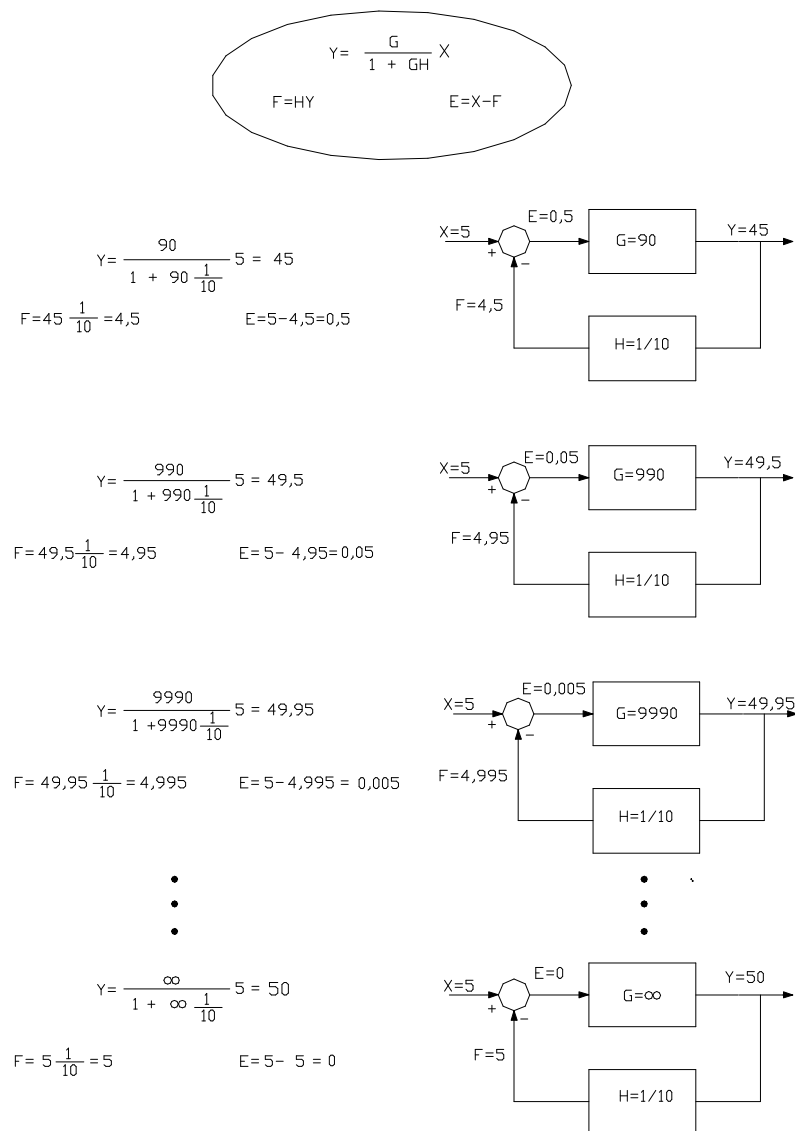
$$Y = \frac{G}{1+GH} X \cong \frac{G}{GH} X = \frac{1}{H} X = WX \quad (1.11.3)$$

con

$$W = \frac{Y}{X} = \frac{1}{H} \quad (1.11.4)$$

Nelle ipotesi effettuate la f. d. t. di un sistema retroazionato dipende solo dalla f. di t. della catena inversa ( $H$ ).

Per convincersi della validità di questo risultato, si riportano in Fig.1.11.2, degli esempi numerici per valori crescenti di  $G$ , mostrando, in ogni caso, i valori di tutte le grandezze lungo l'anello di retroazione. L'analisi numerica dei risultati mostra un "avvicinamento" dell'uscita, al valore calcolato con la (1.11.3), tanto maggiore quanto maggiore è il valore di  $G$ .



**Fig.1.11.2** Determinazione dei segnali lungo l'anello di retroazione per diversi valori di  $G$  (f. di t. catena diretta). Si osserva che oltre certi valori di  $G$  l'uscita è praticamente indipendente da questo parametro e tende al valore desiderato  $Y = WX = 10 \cdot 5 = 50$ .

In altre parole si può affermare che si può ottenere un'uscita, che approssima il valore ottenuto dalla (1.11.3) con qualsiasi precisione, pur di scegliere una f. di t. della catena diretta sufficientemente grande. Si deve porre l'attenzione sul fatto che non serve avere un valore preciso della f. di t.  $G$ , l'importante è che il suo valore sia grande, indipendentemente dalla precisione con cui è realizzato. Con riferimento alla Fig.1.11.2, se si ritiene che  $G=990$  sia un valore sufficientemente elevato per approssimare l'uscita con precisione 1%, rispetto al valore ideale ( $Y=10X$ ), un valore di  $G$  aumentato del 100% ( $G=1980$ ) soddisfa ancora (anzi migliora) questa specifica.

Riprendendo in considerazione il caso particolare illustrato in Fig.1.11.1c, se la catena diretta è realizzata con un operazionale avente amplificazione differenziale  $Ad$ , tale da soddisfare la seguente condizione:

$$GH = A_d \frac{R_2}{R_1 + R_2} \gg 1 \quad (1.11.5)$$

allora è valida la (1.11.4), per cui si ottiene la ben nota amplificazione di tensione  $A_v$ , dell'amplificatore non invertente di Fig.1.11.1c

$$W = A_v = \frac{1}{H} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (1.11.6)$$

Si è già parlato, in modo informale, di precisione, per valutare lo scostamento dell'uscita del sistema rispetto a quella desiderata. L'importanza assunta da questo dato, specie nel campo dei controlli automatici, una definizione più rigorosa di questo parametro.

Si definisce **precisione a regime del sistema retroazionato** come la percentuale della differenza Tra l'uscita desiderata  $Y_d=(1/H)X$  e quella dell'uscita effettiva  $Y=[G/(1+GH)]X$ , rispetto al valore di  $Y_d$ . Vale cioè la:

$$e\% = \frac{Y_d - Y}{Y_d} 100 = \frac{\frac{1}{H} X - \frac{G}{1+GH} X}{\frac{1}{H} X} 100 = \frac{1}{1+GH} 100 \quad (1.11.7)$$

Ricordando che il segnale di retroazione  $F$  rappresenta, a meno del fattore di scala  $H$  ( $F=HY$ ), l'immagine del segnale di uscita effettiva riportato in ingresso e che la grandezza di riferimento  $X$ , con lo stesso fattore di scala, rappresenta l'uscita desiderata ( $X=HY_d$ ) il calcolo della precisione a regime si ottiene anche con la:

$$e\% = \frac{Y_d - Y}{Y_d} 100 = \frac{HY_d - HY}{HY_d} 100 = \frac{X - F}{X} 100 = \frac{E}{X} 100 \quad (1.11.8)$$

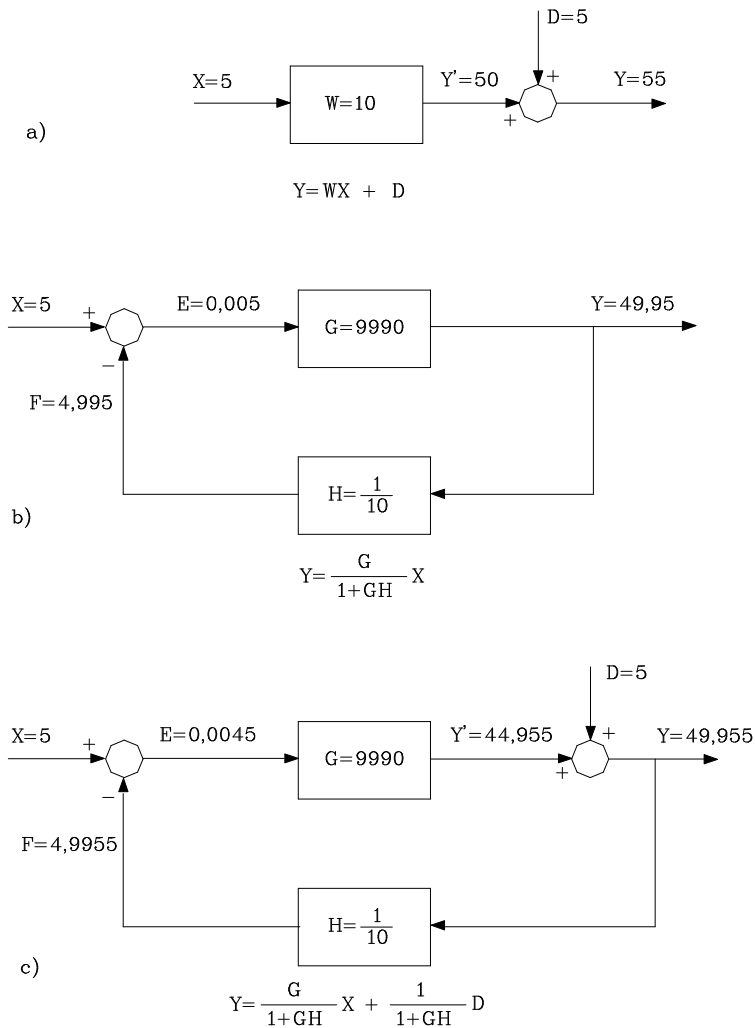
La (1.11.8) mostra come la precisione sia espressa, in percentuale, dal rapporto tra il segnale di errore,  $E$ , e quello di riferimento,  $X$ . La precisione del sistema si aumenta, quindi, riducendo il più possibile il segnale di errore. Uguagliando gli ultimi membri delle (1.11.7) e (1.11.8) si ottiene:

$$E = \frac{1}{1+GH} X \quad (1.11.9)$$

che consente di valutare direttamente il segnale di errore dal segnale di riferimento, nota la f. di t.  $1/(1+GH)$ .

#### - tendenza ad attenuare sensibilmente i disturbi prodotti in uscita al blocco $G$ della carena diretta

Un altro aspetto che è utile mettere in luce, riguardo ai sistemi retroazionati, è la capacità di attenuare notevolmente i disturbi che agiscono sul segnale d'uscita. Si ricorda che si ritiene un **disturbo** di un sistema un segnale di ingresso non voluto che in qualche modo si riflette sul segnale di uscita. Per questo scopo, si supponga che un disturbo, di valore  $D=5$  (uguale al segnale d'ingresso  $X$ ), agisca sia all'uscita di un sistema, non retroazionato, detto anche **sistema in catena aperta**, con f. di t.  $W=10$ , sia di uno retroazionato (**sistema in catena chiusa**), con  $G=9990$  e  $H=1/10$  (Fig.1.11.3).



**Fig.1.11.3** a) Sistema in catena aperta con disturbo in uscita. b) Sistema in catena chiusa senza disturbo  
c) Sistema in catena chiusa con disturbo in uscita

L'uscita del sistema in catena aperta di Fig.1.11.3a assume il valore:

$$Y = WX + D = 10 \cdot 5 + 5 = 55$$

In questo caso il disturbo si somma interamente all'uscita provocando una variazione di quest'ultima pari a

$$\Delta Y\% = \frac{Y - Y'}{Y'} 100 = \frac{55 - 50}{50} 100 = 10\%$$

In Fig.1.11.3b è stato riproposto, a scopo di confronto, lo schema del sistema retroazionato senza disturbo già risolto in Fig.1.11.2.

Per il sistema retroazionato con disturbo, illustrato in Fig.1.11.3c, si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 Y &= Y' + D && \text{nodo sommatore} \\
 F &= HY && \text{catena inversa} \\
 E &= X - F && \text{nodo di confronto} \\
 Y' &= GE && \text{catena diretta}
 \end{aligned}
 \tag{1.11.10}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 Y &= GE + D = G(X - F) + D = G(X - HY) + D = GX - GHY + D \\
 Y + GHY &= GX + D
 \end{aligned}$$

ed infine:

$$Y = \frac{G}{1+GH} X + \frac{1}{1+GH} D
 \tag{1.11.11}$$

Da questa relazione finale appare un risultato d'estrema importanza dato che si nota come l'uscita in presenza di disturbo è uguale a quella senza il disturbo a cui si aggiunge un disturbo attenuato  $1/(1+GH)$  volte. Si nota, infatti, che questa frazione è notevolmente minore di uno, dato che  $GH \gg 1$ . Utilizzando i valori numerici portati ad esempio si ha:

$$Y = \frac{9990}{1 + 9990 \cdot \frac{1}{10}} 5 + \frac{1}{1 + 9990 \cdot \frac{1}{10}} 5 = 9,99 \cdot 5 + 0,001 \cdot 5 = 49,95 + 0,005 = 49,955$$

In questo caso solo la millesima parte del disturbo si ripercuote sul segnale d'uscita, producendo un errore di appena lo 0,01% ( $0,005/49,95 \cdot 100$ ). Si può affermare, con buonissima approssimazione, che il disturbo è stato eliminato!

Confrontando i sistemi di Fig.1.11.3b e c) si può giustificare questo risultato, a prima vista sorprendente. Si osserva, infatti, che, l'aumento dell'uscita, anche di una quantità così esigua (5 millesimi), produce un proporzionale aumento di  $F$  (da 4,995 a 4,9955), che a sua volta produce un'uguale riduzione del segnale d'errore. Questa debole diminuzione di  $E$  (0,0005) è amplificata 9990 volte perciò l'uscita  $Y'$  si riduce di una quantità quasi pari all'intero disturbo ( $0,0005 \cdot 9990 = 4,995$ ). Il sistema retroazionato, reagisce al disturbo che cerca di far salire l'uscita, riducendo di un'uguale quantità il segnale prodotto dal blocco  $G$ .

**Esempio 1.2** È possibile ottenere la (1.11.11) applicando il *principio di sovrapposizione degli effetti* dato che il sistema considerato è lineare. Per questo motivo si può determinare l'uscita del sistema come somma delle uscite prodotte separatamente dall'ingresso  $X$  e dal disturbo  $D$ . Detta  $Y_X$  la prima delle due, si ha la ben nota risposta del sistema retroazionato senza disturbo, data da:

$$Y_X = \frac{G}{1+GH} X
 \tag{1.11.12}$$

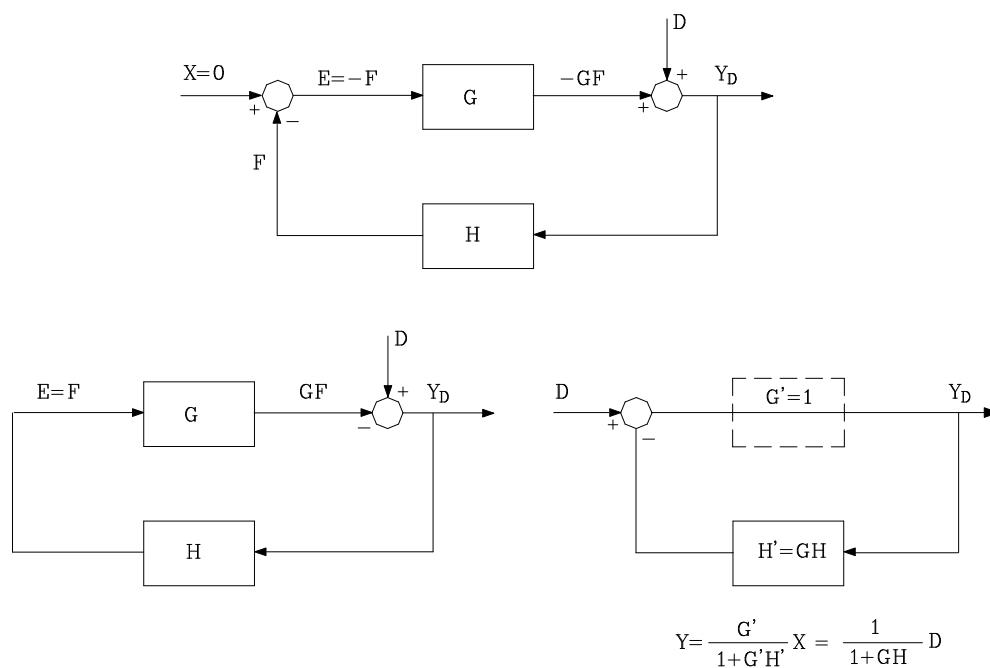
Detta  $Y_D$  la risposta dovuta al solo disturbo, dallo schema a blocchi modificato come in Fig.1.11.4, nel quale la f. di t. della catena diretta è unitaria, si ottiene immediatamente:

$$Y_D = \frac{1}{1+GH} D \quad (1.11.13)$$

L'uscita complessiva, presente quando agiscono sia il segnale di ingresso sia il disturbo è data da:

$$Y = Y_X + Y_D \quad (1.11.14)$$

Sostituendo le due espressioni trovate per le uscite parziali si ritrova la relazione ottenuta precedentemente.



**Fig.1.11.4** Schema a blocchi del sistema retroazionato rispetto al solo disturbo in uscita e sue trasformazioni per ricondursi al modello generale di sistema retroazionato.

□

Confrontando le espressioni (1.11.9) e la (1.11.13), si osserva che la f. di t. tra il segnale di riferimento e l'errore coincide con la f. di t. tra il disturbo e l'uscita. Dato che la prima delle due determina la precisione a regime, si può concludere che la percentuale dell'errore a regime (vedi la 1.11.7) coincide con la percentuale del disturbo in uscita data da (vedi la 1.11.13):

$$\Delta Y_D \% = \frac{Y_D}{D} 100 = \frac{1}{1+GH} 100 \quad (1.11.15)$$

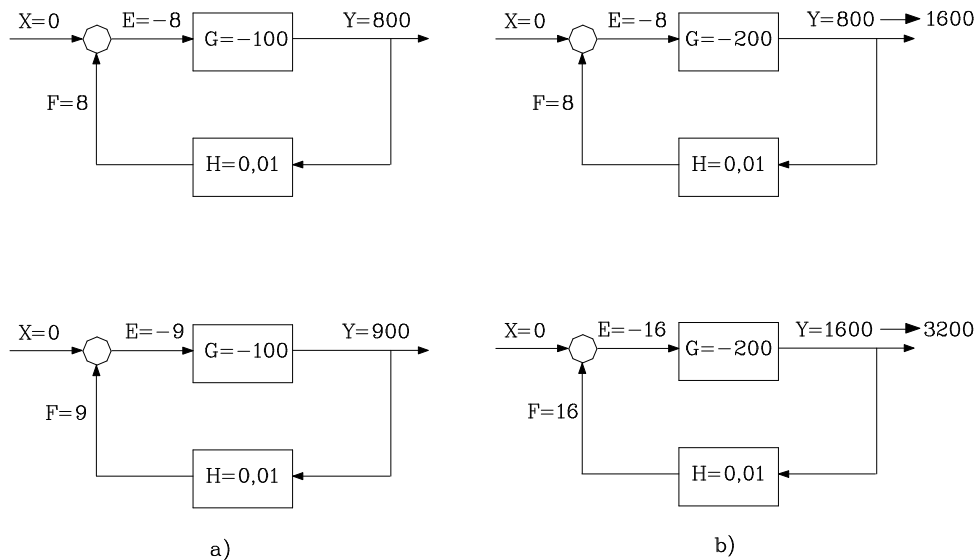
A conclusione di questa parte introduttiva sui sistemi retroazionati si vuol rilevare che, alle importanti proprietà di questo tipo di sistemi, se ne aggiungeranno altre, che saranno descritte nello studio della dinamica dei sistemi.

## 1.12 Stabilità dei sistemi retroazionati

Riassumendo, quanto fin qui descritto sui sistemi retroazionati, si può concludere che i vantaggi di questa soluzione consistono nella:

1. capacità di realizzare sistemi con f. di t. ( $W$ ) di buona precisione purché sia costruita con precisione la f. di t. della catena inversa ( $H$ ).
2. capacità di realizzare sistemi con f. di t. ( $W$ ) indipendente dalla f. di t. della catena diretta ( $G$ ) purché risulti  $GH \gg 1$
3. capacità di realizzare sistemi che reagiscono a tutti i disturbi prodotti in uscita mantenendola praticamente costante e dipendente solo dal segnale d'ingresso ( $Y=WX$ ).

A tutti questi pregi, che consigliano di usare questa architettura in molte applicazioni pratiche, sia nel settore dell'elettronica sia in quello dei controlli automatici, si contrappone il pericolo che, in particolari condizioni, l'uscita  $Y$  del sistema assuma valori indipendenti dall'ingresso, o, peggio, tenda spontaneamente ai valori limite (saturazioni) consentiti dalle apparecchiature utilizzate. Questa condizione anomala, detta di **instabilità**, si verifica ad esempio nel sistema di Fig.1.12.1.



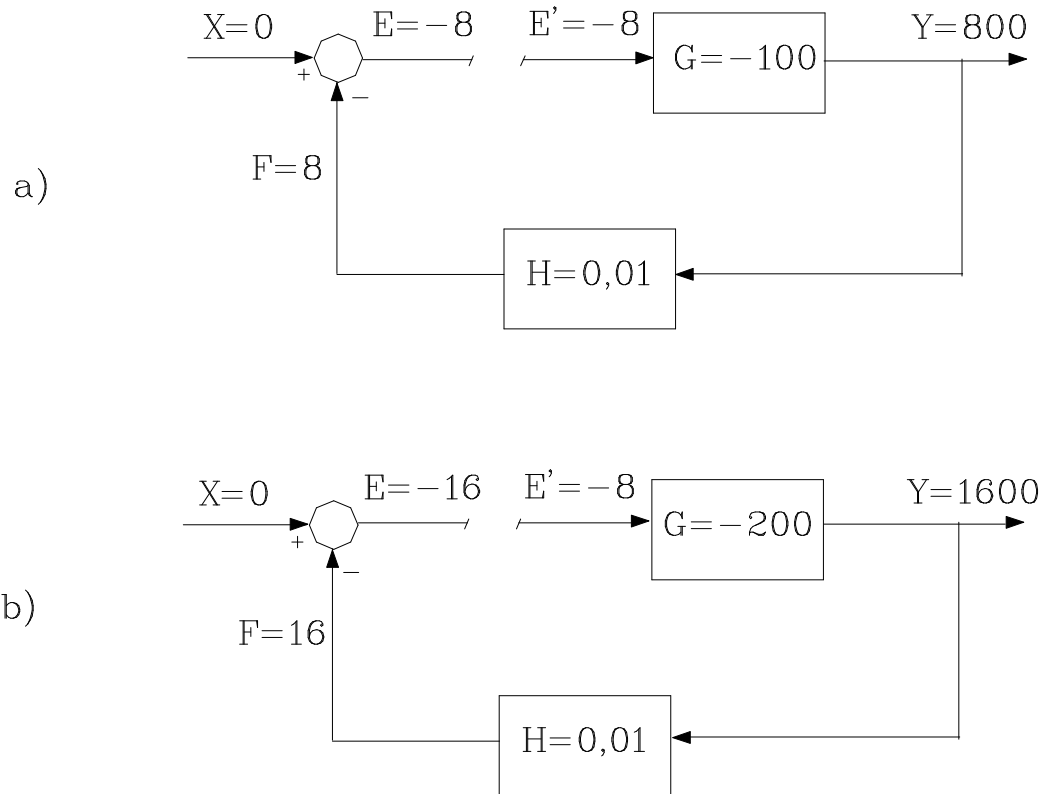
**Fig.1.12.1** a) Sistema instabile che autosostiene qualunque valore dell'uscita con  $X=0$ .  
b) Sistema instabile che aumenta l'uscita fino alla saturazione con  $X=0$ .

Nella parte a) della suddetta figura si nota come, qualunque valore si ipotizzi in uscita, l'anello mantiene questo valore senza il contributo dell'ingresso, che è nullo. Si può parlare, in questo caso, di condizione di **equilibrio indifferente** che si può esprimere con la frase "*dove lo si mette (valore di  $Y$ ) sta*". Alla stessa condizione di funzionamento si arriva imponendo valori casuali a  $F$  o a  $E$ .

Ovviamente questo funzionamento è assolutamente da evitare dato che l'uscita non può più essere controllata dall'ingresso  $X$  che perde la sua funzione.

Il risultato ottenuto è ovvio se si immagina di sezionare l'uscita del nodo di confronto dall'ingresso del blocco  $G$ . Imposto all'ingresso del blocco  $G$  un qualunque segnale, dato che il prodotto  $GH=-1$ , con l'inversione di segno prodotta dal blocco di confronto, si ottiene, in uscita del nodo di confronto, lo stesso segnale. La Fig.1.12.2a illustra quanto affermato. Questo risultato, assolutamente da evitare nei sistemi di controllo, è utilizzato (previa eliminazione dell'ingresso  $X$ , che non ha più ragione di essere) per costruire generatori di segnali sinusoidali (oscillatori).

Risultato ancora peggiore si ottiene nel sistema descritto in Fig.1.12.2b. In questo caso, fissato un arbitrario valore di ingresso del blocco  $G$ , comunque piccolo, il sistema lo esalta progressivamente fino ai limiti consentiti dalla saturazione. Anche questo risultato è ovvio, dato che essendo  $GH < -1$ , con l'inversione di segno prodotto dal blocco di confronto, si ottiene in uscita al blocco  $G$  un valore superiore a quello posto in ingresso al blocco  $G$ . Si parla in questo caso di **equilibrio instabile**.



**Fig.1.11.2** a) Anello di retroazione con  $GH=-1$ , sezionato in uscita per mostrare la sua capacità di generare in uscita al blocco  $G$  lo stesso segnale (arbitrario) applicato all'ingresso del blocco  $H$ . b) Stessa condizione per l'anello con  $GH < -1$ . In questo caso l'ingresso al blocco  $H$  viene raddoppiato ( $GH=-2$ ) in uscita al blocco  $G$ .

Riassumendo quanto fin qui esposto, si può affermare che il comportamento del sistema retroazionato è notevolmente condizionato dal prodotto  $GH$ , definito come **funzione di trasferimento in catena aperta**, in quanto rappresenta il rapporto tra uscita del blocco  $H$  e ingresso del blocco  $G$ .

In particolare si hanno le seguenti situazioni:

- $GH > -1$  funzionamento normale del sistema a retroazione per il quale valgono tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti.
- $GH = -1$  funzionamento in equilibrio indifferente o al limite di stabilità. Con  $X \neq 0$  si verifica facilmente che l'uscita "scappa" rapidamente verso i limiti di saturazione (ciò che avviene con  $X=0$  quando  $GH < -1$ ).
- $GH < -1$  funzionamento decisamente instabile. L'uscita raggiunge i limiti della saturazione indipendentemente dall'ingresso.

Da questa esposizione può sembrare molto facile stabilire se un sistema è stabile oppure no. In verità, il modello che si è sin qui fatto di un sistema, è una notevole semplificazione della realtà fisica, dato che, sia la f. di t. della catena diretta sia quella della catena inversa, sono state rappresentate con delle costanti. Ciò corrisponde ad affermare che, ad ogni variazione del segnale di ingresso, di un qualunque dei due blocchi, si ha istantaneamente una proporzionale variazione della rispettiva uscita. Si parla in questo caso, puramente ideale, di **sistemi istantanei** (o *statici*). Purtroppo l'ipotesi di sistemi istantanei, situazione che permetterebbe una rapida identificazione della stabilità, è una idealizzazione teorica. Nelle applicazioni reali, invece, vi sono solo componenti la cui f. di t. dipende dall'andamento temporale dei segnali. Questo fatto complica notevolmente l'indagine sulla stabilità del sistema che non risulta mai così immediata. Sono state introdotte varie metodologie per individuare la stabilità nei casi concreti, più o meno complesse, alcune delle quali saranno analizzate successivamente.

### 1.13 Definizione di processo

Con il termine **processo** si indicano, in generale, una sequenza di azioni ordinate in modo tale da produrre un certo risultato. Ad esempio per processo industriale si intende, in generale, una serie ordinata di trasformazioni prodotte su delle materie prime, per ottenere particolari prodotti finiti. Evidentemente, ricordando il significato di sistema, come l'insieme degli oggetti organizzati in modo tale da produrre un particolare funzionamento, si comprende come, con il termine processo, s'intendano le azioni sviluppate da un sistema funzionante.

Un calcolatore, che sta eseguendo un programma, sviluppa un insieme di attività che costituiscono un processo. A questo riguardo si può osservare che, in funzione dei dati da elaborare, uno stesso programma può dar luogo ad una diversa sequenza di attività e quindi a processi diversi. In questo caso, si può definire lo stato di un processo, in un certo istante, come l'insieme dei valori assunti dalle variabili elaborate dal programma (contenute nella memoria e/o nella CPU). Cambiando i valori iniziali (stato iniziale) di queste variabili cambia la sequenza delle azioni eseguite dall'elaboratore e quindi il processo. Il concetto di processo è fondamentale per comprendere le attività eseguite dal Sistema Operativo (S.O.) di un elaboratore.

Nel settore dei controlli automatici si usa spesso la frase **controllo di processo**, intendendo con ciò l'insieme delle azioni, sviluppate in modo automatico all'interno di un sistema, che fanno in modo che le uscite assumano l'andamento desiderato, anche in presenza di disturbi di varia natura.